

## ***Evolución del plano complejo al sistema de coordenadas del cuaternión y a la geometría tresespacial***

André Michaud

Service de Recherche Pédagogique

→ [Click here for English version](#)

→ [Cliquer ici pour version française](#)

→ [Hier anklicken für die Deutsche Fassung](#)

**Resumen:** El objeto de este artículo es un análisis comparativo de las características geométricas del conjunto de los vectores unitarios 2D del plano complejo tal como se utilizan en la Mecánica Cuántica y en el tratamiento de los circuitos eléctricos LC, del conjunto 3D de los vectores unitarios de la hipersfera de Hamilton tal como se utilizan en la teoría cuántica y, por último, del conjunto 3x3D de los vectores unitarios de la geometría tresespacial tal como se utilizan en la mecánica electromagnética. Análisis de las implicaciones de la extensión de la utilización del sistema de coordenadas de la hipersfera al tratamiento de los circuitos LC y al sistema de coordenadas cartesianas 3D tradicional, y de las consecuencias de la utilización de una propiedad única del producto vectorial cruzado de los vectores unitarios complejas del cuaternión de invertir el sentido de aplicación del vector unitario resultante real en el desarrollo de la mecánica electromagnética mediante la geometría tresespacial. A continuación, proporcionar un resumen de las principales cuestiones fundamentales de mecánica electromagnética que el uso del producto vectorial del cuaternión en la geometría tresespacial permitió resolver, la primera de las cuales fue la identificación de las propiedades que debe tener la energía fundamental para que obedezca a las condiciones identificadas por Louis de Broglie para que los fotones electromagnéticos localizados obedezcan a las ecuaciones de Maxwell. Y finalmente, presentación de los principales procesos mecánicos complementarios que se desarrollaron al tener en cuenta estas propiedades de la sustancia energía y esta propiedad especial del producto vectorial cruzado del cuaternión para explicar la causa de las frecuencias electromagnéticas, la relación entre el espín del electrón y su aspecto magnético, el desacoplamiento de fotones electromagnéticos sin masa en pares masivos electrón-positrón, la existencia de las cargas eléctricas invariantes del electrón y del positrón y de las cargas fraccionarias de los subcomponentes internos colisionables de los protones y neutrones, la estabilidad del protón y la inestabilidad del neutrón aislado, etc..

**Palabras clave:** El plano complejo; La teoría cuántica; El cuaternión; La geometría tresespacial; La mecánica electromagnética.

Este artículo se publicó en la revista de ingeniería IJERD en marzo de 2024:

Michaud, A. (2024) *Evolution From the Complex Plane to the Quaternion Coordinate System to the Trispatial Geometry*. International Journal of Engineering Research and Development e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. March 2024. Volume 20, Issue 3. pp. 108-130.

<http://www.ijerd.com/paper/vol20-issue3/2003108130.pdf>

### **Otros artículos en el mismo proyecto:**

[INDEX - Mecánica electromagnética – El modelo de los 3-espacios](#)

Aquí está su traducción al español:

## 1. Introducción

Experimentos recientes han demostrado claramente que el uso de números complejos en las ecuaciones de la teoría cuántica es esencial para dar cuenta correctamente de los resultados de estos experimentos y que restringir los cálculos únicamente a números reales no permitiría predecir con tanta exactitud los resultados de estos experimentos, como se indica en un artículo reciente de *Physics World Research Update* [1] [2] [3].

Pero dado que el conjunto de los números reales representados por  $a$  es un subconjunto de los *números complejos*  $a + ib$  – en los que  $i = \sqrt{-1}$  y que  $a$  y  $b$  son números reales – y que la relación entre la parte real  $a$  y la parte compleja  $ib$  es de naturaleza geométrica en el *plano complejo*, que no parece pertenecer al espacio normal representado tradicionalmente por el sistema de coordenadas cartesianas tridimensionales ( $x, y, z$ ), pero que, sin embargo, se entiende que es perpendicular a un eje paralelo al eje  $x$  del sistema de coordenadas cartesianas, parece oportuno examinar más detenidamente el aspecto geométrico de esta relación.

Fue Caspar Wessel quien identificó en 1797 la propiedad de perpendicularidad del plano complejo respecto al eje de los números reales, cuando se dio cuenta de que un segmento de línea recta que partiera del punto cero del eje real, correspondiera a  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  y formara un ángulo  $\theta$  con respecto al eje real, también podría utilizarse para representar un *número complejo*.

Esto significa dado que  $r \angle \theta = a + ib$ , lo que implica que cuando  $a$  se fija en 0 a lo largo del eje real y  $b$  se fija en 1, entonces  $i = \sqrt{-1} = r \angle 90^\circ = 1 \angle 90^\circ$  se convierte *por estructura* en un vector unitario de magnitud 1 girado  $90^\circ$  desde el eje real a lo largo de un eje imaginario exactamente perpendicular al eje real, este último que se considera paralelo al eje  $x$  del sistema de coordenadas cartesianas, pero que no es ni el eje  $y$  ni el eje  $z$  de este sistema de coordenadas, aunque este eje imaginario se represente a menudo como coincidente con el eje  $y$  cartesiano por comodidad de representación gráfica. Véase las **Figuras 1** y **2** a continuación, así que el razonamiento de Wessel para definir esta orientación geométrica de  $i$  con respecto al eje real, tal como se expone en la Referencia [4].

También hay que señalar que los *números hipercomplejos*  $a + ib + jc + kd$  definidos por Hamilton, en los que  $j$  y  $k$  también son iguales a  $\sqrt{-1}$  – y que también pueden definirse como vectores unitarios *por estructura*, al igual que  $i$  – han sido ampliamente asociadas a la teoría cuántica desde la perspectiva *algebraica* por muchos investigadores, por ejemplo [5] [6], y también a la teoría electromagnética [7] [8], pero no desde la perspectiva *geométrica* que se abordará aquí.

Otro campo que también utiliza números complejos es el análisis de circuitos electrónicos sinusoidales, que generalmente implican sistemas RLC o LC formados por bobinas de alambre y condensadores – R representa la *resistencia*, L la *inductancia magnética* y C la *capacitancia eléctrica* – cuyas características establecen las frecuencias de señal requeridas en estos circuitos [9].

Una nota interesante en este momento en el contexto de los sistemas LC es que dicha relación electromagnética también puede relacionarse con el fotón electromagnético de doble partícula de de Broglie cuando se aplica la corriente de desplazamiento de Maxwell

## *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

para establecer su estructura electromagnética interna a medida que se propagan en el vacío a nivel subatómico [10] [11], en el que la constante de permitividad del vacío  $\epsilon_0$  es en realidad una medida de *capacitancia eléctrica transversal por metro* – también simbolizada por C en la teoría electromagnética. Por su parte, la constante de permeabilidad del vacío  $\mu_0$  es una medida de *inductancia magnética transversal por metro* – también simbolizada por L en la teoría electromagnética [12].

También hay que señalar aquí que los números hipercomplejos aparentemente nunca se relacionaron con los sistemas LRC o LC desde la perspectiva geométrica, a pesar de la evidente implicación de los números complejos en sus ecuaciones. Veremos más adelante que los números hipercomplejos pueden participar geoméricamente en los sistemas LRC y LC, aunque de formas potencialmente inesperadas.

En resumen, a la luz de los resultados de los experimentos [1] y [2], se puede argumentar que algo en las ecuaciones de la mecánica cuántica y de los sistemas RLC y LC *es perpendicular por estructura a otra cosa* de un modo que no se puede ignorar sin perder la precisión revelada por los experimentos, que confirman la necesidad de utilizar números complejos en sus ecuaciones. En este artículo exploraremos cuáles podrían ser *esas cosas*.

Por último, examinaremos la relación entre la geometría tresespacial subyacente a la mecánica electromagnética de las partículas elementales [13] [14] y estas relaciones geométricas complejas cuando el conjunto estándar de vectores unitarios  $i=j=k=1$  *por definición* se sustituye por el conjunto de vectores unitarios complejos por estructura  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  en el sistema de coordenadas cartesianas 3D y en el sistema de coordenadas de la geometría tresespacial.

## **2. Perspectiva histórica**

Veamos primero cómo el concepto de de Broglie de la *onda piloto* – que originalmente llamó *onda de fase* en su tesis de 1924 [15] [16] – y la introducción por Schrödinger de los números complejos en su ecuación de onda [17], cambiaron la percepción tradicional del electrón de la mecánica clásica de principios del siglo XX, como si fuera un cuerpo rígido muy pequeño y localizado con una masa en reposo fija que se movía a lo largo de una trayectoria precisa y cerrada en el átomo de hidrógeno, a un estado de localización y movimiento mucho menos claramente definido.

He aquí una cita de la comparación metafórica que propuso en su tesis de 1924 para ilustrar este movimiento del electrón tal como él lo visualizaba en el modelo idealizado del átomo de hidrógeno de Bohr:

*"La notion d'onde de phase va nous permettre de fournir une explication de la condition d'Einstein. Il résulte des considérations du chapitre II que la trajectoire du mobile est un des rayons de son onde de phase, celle-ci doit courir le long de la trajectoire avec une fréquence constante (puisque l'énergie totale est constante) et une vitesse variable dont nous avons appris à calculer la valeur. La propagation est donc analogue à celle d'une onde liquide dans un canal fermé sur lui-même et de profondeur variable. Il est*

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

*physiquement évident que, pour avoir un régime stable, la longueur du canal doit être en résonance avec l'onde ; autrement dit, les portions d'onde qui se suivent à une vitesse égale à un multiple entier de la longueur l du canal et qui se trouvent par suite au même point de celui-ci, doivent être en phase. La condition de résonance est  $l = n\lambda$  si la longueur d'onde est constant et  $\oint (v/V) dl = n$  (entier) dans le cas général."*

Louis de Broglie (1924) ([15], p. 65)

*"El concepto de onda de fase nos permitirá dar una explicación de la condición de Einstein. De las consideraciones del Capítulo II se desprende que la trayectoria del cuerpo en movimiento es uno de los rayos de su onda de fase, que debe viajar a lo largo de la trayectoria con una frecuencia constante (ya que la energía total es constante) y una velocidad variable, cuyo valor hemos aprendido a calcular. La propagación es, pues, análoga a la de una onda líquida en un canal autónomo de profundidad variable. Es físicamente obvio que, para tener un régimen estable, la longitud del canal debe estar en resonancia con la onda; en otras palabras, las porciones de la onda que se suceden a una velocidad igual a un múltiplo entero de la longitud l del canal y que, por tanto, se encuentran en el mismo punto del canal, deben estar en fase. La condición de resonancia es  $l = n\lambda$  si la longitud de onda es constante y  $\oint (v/V) dl = n$  (entero) en el caso general."*

A continuación propuso la siguiente ecuación de la mecánica cinemática, que desencadenó el desarrollo de la mecánica ondulatoria, seguida poco después por la mecánica cuántica ([15], p. 65) ([16], p. 52):

$$m_0 \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R m_0 v = n h \quad (1)$$

Véase la **Sección 6** de las Referencias [13] [14] para un análisis completo de esta ecuación aparentemente trivial que tanto revolucionó la física fundamental después de que Erwin Schrödinger la convirtiera en una ecuación vectorial de mecánica ondulatoria:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

La Ecuación (2) de Schrödinger genera exactamente la misma secuencia de niveles cuantizados de energía de momentum ligados a la secuencia de enteros que la Ecuación (1) de de Broglie, pero ahora se calcula desde el punto de vista de una oscilación ondulatoria a cambio del punto de vista cinemático de la mecánica clásica utilizado por de Broglie de la masa de un electrón localizado que oscila radialmente a ambos lados de la trayectoria circular idealizada del estado básico del modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

La trayectoria circular del estado básico del átomo de Bohr se describe como *idealizada* porque su establecimiento teórico alrededor del protón central se suponía inicialmente seguido por un electrón localizado considerado masivo en el sentido tradicional de la mecánica clásica, pero que de Broglie había comprendido recientemente que era cautivo de un estado de resonancia radial en oscilación estable alrededor de esta

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

órbita circular, de modo que se podía explicar la secuencia de frecuencias relacionadas con números enteros observada en el espectro del átomo de hidrógeno.

Las *órbitas* metaestables más distantes del átomo de Bohr hacia las que se suponía que saltaba el electrón cuando se energizaba alejándose de la *órbita* del estado fundamental podrían entonces explicarse como múltiplos de resonancia de la longitud de la *órbita* del estado fundamental, explicando directamente todo el espectro de frecuencias energéticas emitidas por el átomo de hidrógeno cuando el electrón vuelve al estado fundamental desde esta serie de distancias metaestables, correspondiente a la serie de Lyman.

La principal diferencia entre la Ecuación (1) y la Ecuación (2) es la introducción por Schrödinger de los *números complejos* en la Ecuación (2), que implica una relación estructural perpendicular entre ciertos elementos de la Ecuación (2) de la mecánica ondulatoria, ausente en la Ecuación (1) de la mecánica clásica utilizada por de Broglie.

Examinemos ahora qué elementos de la conclusión de de Broglie sobre la oscilación radial del electrón alrededor de la órbita circular idealizada del estado básico del modelo de Bohr debió percibir Schrödinger como perpendiculares entre sí, hasta el punto de ser representables mediante *números complejos*.

A partir de su propia conclusión, de Broglie percibió evidentemente que la oscilación del electrón a lo largo de su trayectoria implicaba un impulso longitudinal – su *onda de fase* citada anteriormente, que también denominó *onda piloto* – que propulsaría al electrón, dando lugar a una oscilación transversal estable del electrón, similar a la masa lineal de una cuerda elástica en mecánica clásica que oscila transversalmente hacia arriba y hacia abajo a medida que el impulso inicial avanza longitudinalmente a lo largo de la cuerda [12].

Esta observación por sí sola justificó plenamente la introducción por Schrödinger de la condición compleja  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , en su Ecuación (2) que representa la masa en reposo del electrón como una representación difusa débilmente localizable de su probabilidad de presencia [Véase Ecuación (4)], arrastrada en un movimiento dinámico transversal adaptando la función de onda para partículas libres Ecuación (3), en la que  $i$  establece que este movimiento del electrón, cuyo *centro-de-presencia* está representado por el punto P en la **Figura 1**, debe oscilar ahora por estructura perpendicularmente a la trayectoria de Bohr en la Ecuación (1) de de Broglie; la órbita idealizada de Bohr en estado básico se convierte conceptualmente en un eje x circular del *plano complejo*, a lo largo del cual el electrón oscilaría cíclicamente desde fuera hacia dentro de la órbita de Bohr en modo estacionario.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \cos(k\vec{r} - \omega t) + i \sin(k\vec{r} - \omega t) \quad (3)$$

Pero dado que el *plano complejo* no está conceptualmente limitado a situarse estrictamente en el mismo plano que la trayectoria circular del estado fundamental, sino que puede tener cualquier orientación angular transversal alrededor de dicha trayectoria, la Ecuación (2) también define un volumen cilíndrico alrededor de la trayectoria del estado fundamental relacionado con la amplitud  $i \sin(kx - \omega t)$  de la *onda de fase*, un volumen dentro del cual es probable que el electrón se encuentre en cualquier punto del espacio en cualquier momento dentro de este volumen, como se pone en perspectiva en las Referencias [18] [19], y en el que se podría mapear directamente el método estadístico de Heisenberg. La incertidumbre resultante en cuanto a la posición instantánea del

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

electrón dentro de este volumen en cualquier momento está probablemente en el origen del *Principio de Incertidumbre* de Heisenberg.

Esta es la razón por la que se sugirió en 2013 en la Referencia [20] restringir la dispersión probabilística de las posibles ubicaciones del electrón en movimiento en el estado fundamental del átomo de hidrógeno aislado a los límites de este volumen cilíndrico en lugar de extenderlo a  $+y - \infty$ , para dar cuenta de los límites impuestos por la inercia del electrón durante sus secuencias de aceleración y desaceleración transversales a medida que oscila alrededor del radio medio de Bohr, con el conjunto de ubicaciones más probables promediándose en el radio de Bohr :

$$\int_r^R |\Psi_{(x,t)}|^2 dVdt = 1 \quad (4)$$

Por supuesto, debido a las interacciones con la materia circundante, es probable que este volumen cilíndrico se extienda en realidad en el límite a un volumen tridimensional circunscrito por las superficies de dos esferas concéntricas cuyos radios interior y exterior serán respectivamente  $r$  y  $R$  a cada lado del radio de Bohr. En consecuencia, es a este volumen exclusivamente, contabilizado por el producto de su función compleja con su conjugado  $\Psi^*\Psi$  en la Ecuación (4), al que se debería aplicar la condición de normalización, ya que cualquier otra localización en el espacio resulta físicamente imposible para el electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno debido a su inercia.

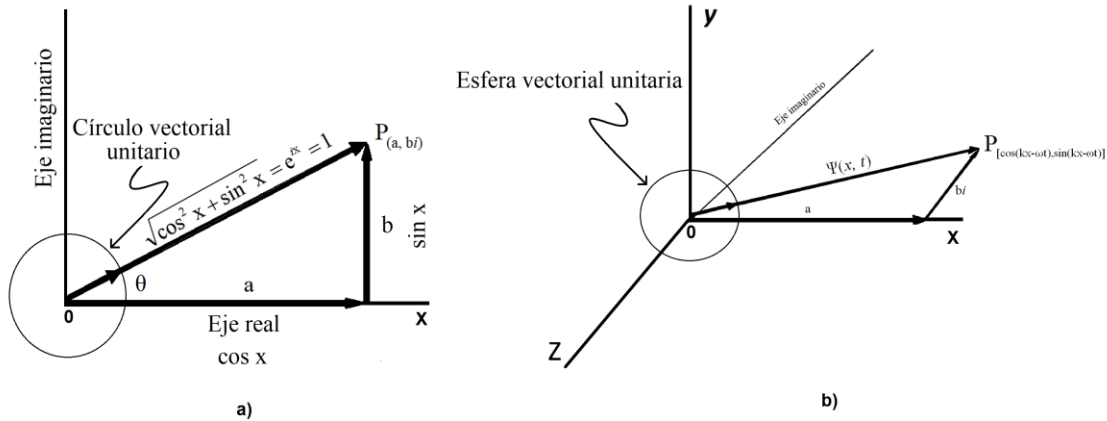
Como ya se ha mencionado, Schrödinger introdujo por tanto en su ecuación una característica que nunca antes se había relacionado con el movimiento de los cuerpos masivos, a saber, una relación perpendicular entre el movimiento transversal local de la masa del electrón en su supuesta trayectoria en el átomo de Bohr y la dirección del movimiento de la energía de la *onda de fase* que lo transporta. Esta relación perpendicular se introduce utilizando el símbolo  $i$ , denominado *unidad imaginaria*, igual a  $\sqrt{-1}$  – de hecho un vector unitario definido como  $1 \angle 90^\circ$  con respecto al *eje real* del *plano complejo*, definido por Vessel, como se explica más adelante – que, elevado al cuadrado ( $i^2$ ), se resuelve en  $-1$ , lo que invierte el sentido de aplicación del vector correspondiente, que es una ventaja añadida del uso de  $i$  en ecuaciones vectoriales.

Como se mencionó anteriormente, los números complejos siempre se pueden escribir bajo la forma:

$$z = a + bi \quad (5)$$

Esto significa que para localizar un punto  $\mathbf{P}$  en el sistema de coordenadas 2D del plano complejo, se requiere un primer desplazamiento hacia la derecha por una distancia  $a$ , medida en números reales, desde el origen de un eje horizontal (**Figura 1a**), y que  $i$  revela que un segundo desplazamiento por una distancia  $b$ , también medida en números reales, debe realizarse *en ángulo recto* desde el extremo derecho del segmento de línea  $a$ , lo que conducirá a una localización fuera del volumen del espacio normal cartografiado por el sistema de coordenadas 3D cartesiano, donde se localizará el punto  $\mathbf{P}$ .

## Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial



**Figura 1:** Ejes *real* e *imaginario* del *plano complejo*.

Nuestro objetivo aquí, sin embargo, no es analizar más a fondo la ecuación de Schrödinger, que se explica en detalle en numerosos manuales, como la excelente obra de Referencia [21], sino explorar más a fondo la propiedad muy especial de  $i=\sqrt{-1}$  de actuar como un *operador de rotación geométrica estática* de cualquier representación vectorial de cualquier cantidad que tenga una magnitud y una dirección de aplicación con respecto al origen **O** del *plano complejo* 2D, como fuerza, presión, velocidad, etcétera.

La consecuencia de esta nueva representación ondulatoria del electrón introducida por Schrödinger es que su presencia en el átomo de hidrógeno ha empezado a percibirse como implicando *orbitales expandidos*, cuyas órbitas circulares idealizadas en el modelo de Bohr representan el conjunto de distancias medias al protón a las que se establece cada volumen de resonancia con la Ecuación (2).

Ahora resulta que de Broglie tenía razón al plantear la hipótesis de que una especie de *onda de energía portadora*, que primero llamó *onda de fase* y luego *onda piloto*, impulsaba y guiaba la masa en reposo del electrón, y que Schrödinger tenía razón al concluir que la energía de *momentum* que vinculaba a esta *onda piloto* actuaba perpendicularmente a la energía de la que estaba hecha la masa en reposo del electrón, pero de una manera que sólo se aclaró mucho más tarde, como veremos a continuación, según las condiciones que el propio de Broglie identificó en 1937 [22] para que esta *energía portadora* obedeciera a las ecuaciones de Maxwell, y según una geometría del espacio que debía – según él – extenderse más allá del marco del espacio-tiempo continuo 4D:

*"... la non-individualité des particules, le principe d'exclusion et l'énergie d'échange sont trois mystères intimement reliés : ils se rattachent tous trois à l'impossibilité de représenter exactement les entités physiques élémentaires dans le cadre de l'espace continu à trois dimensions (ou plus généralement de l'espace-temps continu à quatre dimensions). Peut-être un jour, en nous évadant hors de ce cadre, parviendrons-nous à mieux pénétrer le sens, encore bien obscur aujourd'hui, de ces grands principes directeurs de la nouvelle physique."*

Louis de Broglie 1937 ([22], p. 273)

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

*"... la no individualidad de las partículas, el principio de exclusión y la energía de intercambio son tres misterios estrechamente relacionados: todos ellos están vinculados a la imposibilidad de representar con precisión las entidades físicas elementales en el marco del espacio continuo tridimensional (o, más en general, del espacio-tiempo continuo cuatridimensional). Quizá algún día, escapando de este marco, podamos penetrar mejor en el significado, aún hoy bastante oscuro, de estos grandes principios rectores de la nueva física."*

Esta geometría del espacio extendida prevista por de Broglie fue presentada al Congreso-2000 en julio de 2000 [23], y un descubrimiento realizado por Paul Marmet en 2003 [24] [25] sobre el campo magnético del electrón en aceleración permitió comprender que la *onda piloto* de de Broglie tenía exactamente la misma estructura electromagnética interna que el fotón de doble-partícula cuyas condiciones de establecimiento había identificado en 1937, y cuya ecuación fue publicada formalmente en 2016 [10] [11], explicando la relación entre el *fotón-portador* de electrones y el fotón electromagnético de doble-partícula en movimiento libre que de Broglie había supuesto en 1937, después de haber sido establecido como *fotón-portador* de electrones en 2013 [26].

Yendo aún más lejos que la ya audaz curvatura en círculo cerrado del eje real del *plano complejo* tradicionalmente percibido como rectilíneo ilustrado en la **Figura 1**, tal como lo introdujo Schrödinger, veremos más adelante cómo la geometría tresespacial permite situar este eje en el *centro-de-presencia* de la energía de la masa en reposo del electrón, lo que ha permitido girar la dirección de aplicación de su energía de *momentum* directamente hacia el protón, en lugar de a lo largo de la trayectoria circular idealizada del estado fundamental de Bohr, tal como se entendía a principios del siglo XX, como lo establece la fuerza restauradora de Coulomb en acción atractiva entre el electrón cargado negativamente y el protón cargado positivamente, para actuar en contrapresión contra la repulsión magnética mutua permanente entre el electrón y el protón debido a su alineación de espín magnético paralelo por defecto [18] [19], como confirma el experimento fundamental que subyace al desarrollo de la geometría tresespacial [26] y explica la estabilidad del átomo de hidrógeno, y explica mecánicamente por qué el electrón ni siquiera necesita orbitar el protón para estabilizarse a la conocida distancia media del radio de Bohr del protón, como se analiza en las Referencias [18] [19].

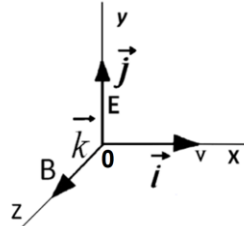
Examinaremos esta geometría espacial ampliada más adelante, pero primero pongamos en perspectiva lo que se ha establecido sobre los *números complejos*, el *plano complejo*, los *números hipercomplejos* y la estructura de los *cuaterniones*, antes de examinar la segunda área en la que los *números complejos* y el *plano complejo* han encontrado aplicación práctica, la de los sistemas RLC y LC, para determinar si dan cuenta tan plenamente como se esperaba de estos conocidos procesos electromagnéticos como lo hacen de la ecuación de Schrödinger.

### **3. El plano complejo**

En el sistema de coordenadas cartesianas 3D estándar de la mecánica clásica, los símbolos de notación *i*, *j* y *k* se utilizan para designar el conjunto de *vectores unitarios*

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

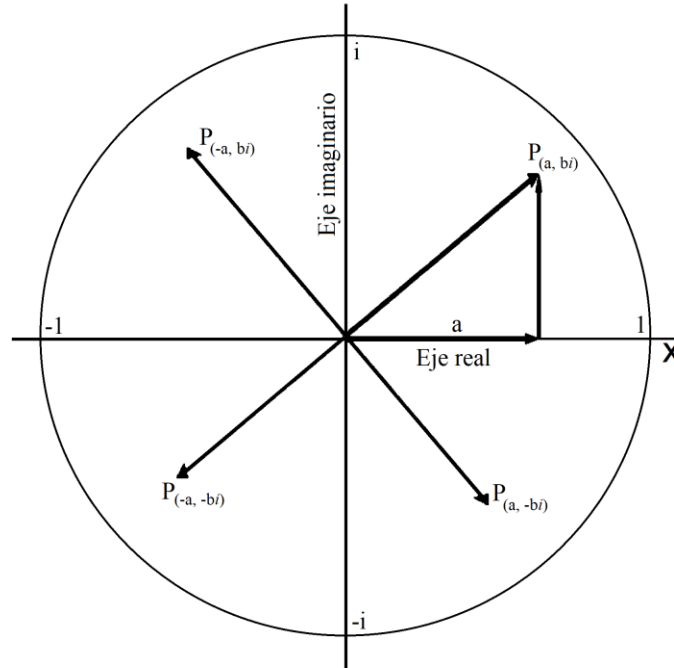
triplemente ortogonales con valores  $i=j=k=1$ , relacionados con los ejes x, y y z del sistema de coordenadas 3D estándar mostrado en la **Figura 2**, lo que puede llevar a cierta confusión en cuanto a su uso cuando representan otras magnitudes en diferentes contextos matemáticos; contextos que suelen ser suficientes para establecer su significado local, especialmente en el caso de los símbolos  $i$  y  $j$  que, en contextos diferentes, pueden definirse ambos con el valor  $i=j=\sqrt{-1}$ ,  $i$  y  $j$  ni siquiera coinciden con el eje geométrico x de la **Figura 2**.



**Figura 2:** Los tres ejes perpendiculares del sistema de coordenadas cartesianas, que permiten situar cualquier punto (x, y, z) del espacio en relación con el lugar  $\mathbf{0}$ , situado en el *centro-de-presencia* de cualquier cuerpo o partícula en el espacio normal.

El conjunto de símbolos  $i=j=k=1$  se utiliza tradicionalmente para identificar el conjunto de *vectores unitarios* relacionados con el sistema de coordenadas cartesianas. Sin embargo, también se utilizan con una definición diferente  $i=j=k=\sqrt{-1}$  como *vectores unitarios complejos* asociados a *números complejos* e *hipercomplejos*.

Los *números complejos* se utilizan en mecánica cuántica, como acabamos de ver, y también ampliamente en el campo eléctrico, y en particular en el conjunto de ecuaciones relativas a la *inductancia* L y la *capacitancia* C que vamos a estudiar aquí; en las que  $j=\sqrt{-1}$  sustituye a  $i=\sqrt{-1}$  para evitar cualquier confusión con el símbolo de la corriente, que también se simboliza por  $i$ . Más adelante veremos cómo se pueden relacionar también las coordenadas de los vectores unitarios del cuaternión  $i=j=k=\sqrt{-1}$  con la *inductancia* y la *capacitancia*, ejercicio que no parece haberse intentado antes, a pesar de la ventaja resultante de relacionar correctamente la energía implicada en la oscilación LC con una relación electromagnética perpendicular entre el campo  $\mathbf{E}$  relacionado con la fase C y el campo  $\mathbf{B}$  relacionado con la fase L de la oscilación LC, en lugar de la relación única de  $180^\circ$  que se les puede asignar en el *plano complejo* actualmente utilizado, como se muestra en la **Figura 3**, aunque ambos puedan representarse como  $90^\circ$  correctamente desplazados con respecto al eje real



**Figura 3:** El círculo vectorial unitario del *plano complejo*.

Como también muestra la **Figura 2**, las relaciones electromagnéticas triplemente perpendiculares  $E/B=c$  y  $E/B=v$  también se mapean en el mismo sistema de coordenadas cartesianas 3D para ilustrar el hecho de que el producto vectorial cruzado de un campo  $E$  con un campo  $B$  mutuamente perpendicular da como resultado un vector de velocidad perpendicular tanto al campo  $E$  como al campo  $B$ , con el eje  $x$  tomado como el eje a lo largo del cual se establece el correspondiente movimiento de energía electromagnética.

El centro del sistema de coordenadas – es decir, la posición  $0$  de los tres ejes – puede situarse en el *centro-de-presencia* de cualquier objeto, hacia el cual o desde el cual puedan apuntar vectores.

Lo que es particularmente intrigante acerca del vector unitario  $i=\sqrt{-1}$  utilizado en el *plano complejo* es que, aunque su origen coincide con el centro del sistema de coordenadas cartesianas 3D, el vector en sí no apunta a ninguna localización  $(x, y, z)$  que estaría situada en el espacio 3D con el que estamos familiarizados, sino que apunta a un lugar de un plano 2D  $(x, i)$  perpendicular a este sistema de coordenadas, a lo largo de un *eje llamado imaginario*, plano que por esta razón se ha denominado *plano complejo*, y que se representa típicamente como en la **Figura 1a**.

Para ilustrar más visualmente la orientación de este *plano complejo* y de su eje imaginario con respecto al eje  $x$  del sistema de coordenadas estándar, y del mismo modo con respecto a los otros dos ejes, en la **Figura 1b** se gira la representación de la **Figura 1a**  $90^\circ$  alrededor del eje  $x$  para mostrar que está orientada en una cuarta dirección perpendicular a los otros tres ejes, lo cual es muy difícil de conceptualizar mentalmente, dado que tratar con más de tres ejes espaciales perpendiculares no parece tener sentido geométrico lógico, porque, como ilustra la **Figura 3**, después de girar  $90^\circ$  3 veces desde un ángulo fijado en  $0^\circ$  en un plano dado, a menos que esta rotación se orienta

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

perpendicularmente a este plano.

Y cuando 3 planos son a su vez perpendiculares entre sí como en el sistema de coordenadas cartesianas que se muestra en la **Figura 2**, una 4ª rotación tal como se ejemplifica con la **Figura 1b**, sólo puede conducir fuera del espacio normal. Más adelante abordaremos esta cuestión de forma lógica. Recordemos ahora algunas reglas básicas que rigen el plano complejo antes de seguir más adelante.

La **Figura 3** muestra el círculo vectorial unitario del *plano complejo* girado 90° alrededor del eje x, de modo que el plano está orientado hacia el lector. En este plano, una cantidad vectorial se resuelve en dos componentes perpendiculares entre sí, una componente *a*, cuya dirección es a lo largo del eje horizontal x, llamado *eje real*, y la otra componente *b*, que se extiende perpendicularmente al *eje real* en una dirección paralela al *eje imaginario*.

Un vector positivo con su dirección a lo largo del eje x se vuelve negativo si se multiplica por -1, es decir,  $(1 \cdot -1 = -1)$ , lo que significa que apuntará hacia la izquierda en la **Figura 3**. Un vector positivo con su dirección hacia arriba a lo largo del *eje imaginario* se vuelve negativo si se multiplica por -1, es decir,  $(i \cdot -1 = \sqrt{-1} \cdot -1 = -i)$  y apuntará hacia abajo a lo largo del *eje imaginario*.

Aumentar las potencias de *i* equivale a girar el vector correspondiente en el *plano complejo* en sentido contrario a las agujas del reloj. Cada aumento de potencia hace girar el vector otro 90°:  $(i^0=1, i^1=i, i^2=-1, i^3=-i)$ . Potencias crecientes o decrecientes de *i* simplemente repiten el mismo ciclo 1, *i*, -1, -*i*. alrededor del origen del círculo vectorial unitario en el *plano complejo*. Por esta razón,  $(i=\sqrt{-1})$  se denomina a menudo el *operador de rotación* [4].

La particularidad de este *operador de rotación* es que, por ejemplo, cuando un *número complejo* como el de la Ecuación (5), resuelto como **P** en la **Figura 1a**, se multiplica por *i*, los segmentos *a* y *b* sufren ambos un giro de 90° en sentido antihorario, lo que sitúa el punto **P** en el segundo cuadrante del círculo:

$$P = i \cdot z = i \cdot (a + ib) = ia - b \quad (6)$$

La multiplicación repetida del resultado de la rotación mostrada en la Ecuación (6) dará como resultado la realización del círculo completo alrededor del origen del *plano complejo*, es decir,  $(-a - ib)$ , situando el punto **P** en el tercer cuadrante, luego  $(a - ib)$  situándolo en el cuarto cuadrante, y finalmente  $(a + ib)$ , situándolo de nuevo en el primer cuadrante.

Como se mencionó en la Introducción, en 1797 Caspar Wessel publicó un trabajo en el que introducía la forma polar de los *números complejos*, a partir de la cual consiguió explicar matemáticamente por qué un *vector unitario* de valor  $\sqrt{-1}$  representa geoméricamente un segmento vectorial de longitud 1 que apunta directamente hacia arriba a lo largo del *eje imaginario* del *plano complejo*.

Dados dos segmentos de línea recta que parten del origen **0** en el *plano complejo* y forman ángulos diferentes con respecto al *eje real*, Wessel estableció que multiplicando las longitudes de los dos segmentos de línea y sumando los dos ángulos, tomando siempre las longitudes como valores positivos, estas dos operaciones determinan la

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

longitud del segmento de línea resultante y su ángulo de dirección con respecto al *eje real*, y que es esta definición del producto la que nos da la explicación de lo que significa geoméricamente  $\sqrt{-1}$ .

Su razonamiento fue el siguiente, citado de la Referencia ([4], p.53):

"Suppose that there is a directed line segment that represents  $\sqrt{-1}$ , and that its length is  $l$  and its direction angle  $\theta$ . Mathematically then, we have  $\sqrt{-1}=l\angle\theta$ . Multiplying this statement by itself, i.e., squaring both sides, we have  $-1=l^2\angle2\theta$  or, as  $-1=1\angle180^\circ$ , then  $l^2\angle2\theta=1\angle180^\circ$ . Thus,  $l^2=1$  and  $2\theta=180^\circ$ , and so,  $l=1$  and  $\theta=90^\circ$ . This says that  $\sqrt{-1}$  is the directed segment of length one pointing straight up along the vertical axis:"

"Supongamos que existe un segmento de línea recta dirigida que representa  $\sqrt{-1}$ , y que su longitud es  $l$  y su dirección ángulo  $\theta$ . Matemáticamente entonces, tenemos  $\sqrt{-1}=l\angle\theta$ . Multiplicando esta afirmación por sí misma, es decir, elevando al cuadrado ambos lados, tenemos  $-1=l^2\angle2\theta$  o, como  $-1=1\angle180^\circ$ , entonces  $l^2\angle2\theta=1\angle180^\circ$ . Por tanto,  $l^2=1$  y  $2\theta=180^\circ$ , y así,  $l=1$  y  $\theta=90^\circ$ . Esto dice que  $\sqrt{-1}$  es el segmento dirigido de longitud uno que apunta hacia arriba a lo largo del eje vertical:"

$$i = \sqrt{-1} = 1\angle90^\circ \quad (7)$$

Desde un punto de vista geométrico, el símbolo  $\angle$  significa simplemente "en un ángulo de rotación".

Su supuesto básico se estableció con referencia a la **Figura 1a**, como explica Nahin en la Referencia [4]. Por lo tanto, si  $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ , entonces:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \{ \cos(\theta) + i \sin(\theta) \} \quad (8)$$

El valor de  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , que es la longitud del *radio vector*, se llama el *módulo* del *número complejo*  $a+ib$ , y el valor del ángulo polar  $\tan^{-1}(b/a)$  se llama el *argumento* de  $a+ib$ . Así, en términos de la longitud del *radio vector* desde el origen hasta el punto  $a+ib$ , una multiplicación de dos segmentos de líneas rectas dirigidos diferentes conduce a:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9)$$

Así que tenemos una explicación perfectamente lógica de por qué  $i=\sqrt{-1}$  es un *vector unitario* girado  $90^\circ$  con respecto al *eje real* en la **Figura 1a**. Pero si asignamos el *eje real* al *eje x* del sistema de coordenadas cartesianas 3D, como en la **Figura 1b**, también observamos que el *eje imaginario* a lo largo del cual se orienta el *vector unitario i* no es el *eje* y del sistema de coordenadas cartesianas, sino que es perpendicular a él.

En resumen, existen al menos 4 formas de expresar un *número complejo*:

$$z = a + ib, z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta), z = re^{i\theta}, z = r\angle\theta \quad (10)$$

La función exponencial  $e^z$  se relaciona con los *números complejos* mediante la fórmula de Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (11)$$

Esto está bien explicado en los manuales de introducción al análisis complejo [27].

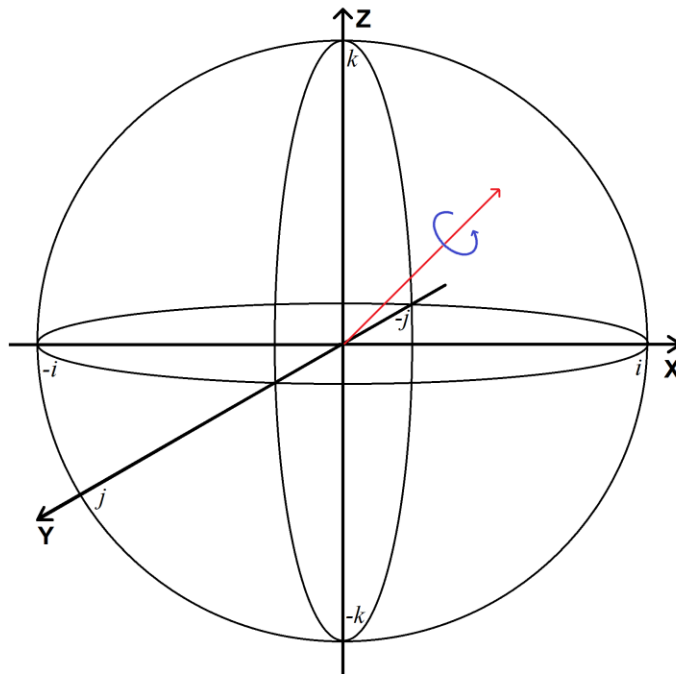
#### 4. Los 3 planos complejos de la hiperesfera de Hamilton

Como menciona Nahin en la Referencia [4], esto es lo que llevó a Hamilton a preguntarse qué resultaría de introducir tales *vectores unitarios orientados* en el espacio tridimensional si se cartografiaran en el sistema de coordenadas cartesianas. Esto le llevó a descubrir los cuaterniones en 1843, que son *números hipercomplejos* de la forma :

$$H = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad (12)$$

En el que  $a$  se extiende a lo largo del *eje real* como en la ecuación del *plano complejo*  $z = a + ib$ , y en el que  $[bi + cj + dk]$  son los tres *vectores unitarios rotados* del sistema de coordenadas de los cuaterniones.

Aquí entramos en el reino de la *geometría hipercompleja*, que implica un sistema de coordenadas que implica tres *vectores unitarios* similares al sistema de coordenadas cartesianas 3D tradicional de la **Figura 2**, pero que implica el conjunto  $i=j=k=1 \angle 90^\circ$ , siendo cada vector unitario  $i$ ,  $j$  y  $k$  perpendicular *por estructura* a los otros dos, en lugar del conjunto  $i=j=k=1$  que son mutuamente perpendiculares sólo *por definición*, y que ahora definen 3 *planos complejos* mutuamente perpendiculares, *el plano xy*, *el plano yz* y *el plano xz* dentro de la *hiperesfera* así definida como se muestra en la **Figura 4**.



**Figura 4:** El sistema de coordenadas del cuaternión.

Con ello, Hamilton dio un gran paso adelante al trasladar el dominio matemático *complejo* de un *plano complejo 2D* en el que un vector de cualquier longitud anclado en el origen  $0$  del sistema de coordenadas 2D podía girar hasta cualquier ángulo posible, como se muestra en la **Figura 3**, hasta una configuración de *tres planos complejos mutuamente perpendiculares* que ahora permiten girar el propio *eje real* hasta cualquier ángulo omnidireccional dentro de la *hiperesfera*, como se muestra en la **Figura 4**.

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

Mientras que el *plano complejo* (**Figura 3**) se divide en 4 cuadrantes, la *hiperesfera* (**Figura 4**) se divide en 8 cuartos de semiesferas. Cuatro constituyen la semiesfera superior y cuatro la inferior, con *el plano xy* tomado convencionalmente como separador por defecto entre las dos semiesferas, y dentro del cual *números hipercomplejos* como el de la Ecuación (12) pueden orientar y rotar un punto sobre el *eje real* en cualquier dirección dentro de la *hiperesfera*, característica muy utilizada en programación de gráficos por ordenador, por ejemplo.

## **5. El sistema de coordenadas 3D del cuaternión**

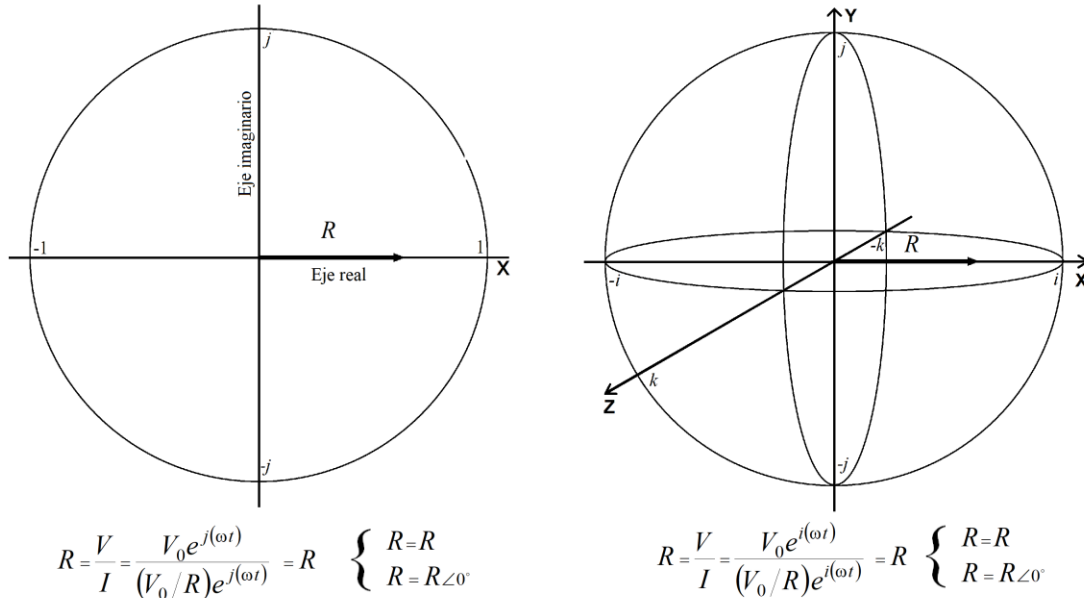
No discutiremos aquí esta conocida capacidad de los cuaterniones para rotar vectores de forma muy útil, sino que analizaremos un aspecto del sistema de coordenadas de los cuaterniones the  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  que no parece haber llamado mucho la atención de la comunidad matemática, o de la comunidad de físicos para el caso, a pesar de la conocida utilidad de la unidad imaginaria  $i=\sqrt{-1}$  y del *plano complejo* para resolver las ecuaciones RLC de capacitancia e inductancia en el diseño de circuitos electrónicos [28].

Para empezar a resolver este problema, primero tenemos que aislar el sistema de coordenadas del cuaternión respecto al *eje real*. Esto puede hacerse poniendo  $a$  a cero en la Ecuación (12). El sistema de coordenadas del *cuaternión* triplemente perpendicular  $ijk$  está ahora definido sin su *eje real* omnidireccionalmente orientable.

$$H_0 = H_{[a=0]} = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad (13)$$

En este estudio, como ejemplo práctico para comparar el procesamiento en el *plano complejo* 2D y el procesamiento en el *sistema de coordenadas del cuaternión* 3D, utilizaremos una situación estándar de reactancia capacitiva e inductiva en la que los valores de resistencia  $R$  y los valores de corriente  $I$  se representan tradicionalmente en el *plano complejo* como aplicados a lo largo del *eje real* como se representa en la parte izquierda de la **Figura 5**, mientras que la reactancia capacitiva  $C$  relacionada con el campo eléctrico inducido  $E$  se representa como orientada hacia el lado negativo del *eje imaginario*, mientras que la reactancia inductiva  $L$  relacionada con el campo magnético inducido  $B$  se representa como orientada hacia el lado positivo del *eje imaginario* (parte izquierda de la **Figura 7**) de modo que aparentemente están desfasadas  $180^\circ$  entre sí (parte izquierda de la **Figura 5**). La referencia [28] proporciona representaciones visuales muy claras de estas 3 representaciones en forma compleja de las ecuaciones de reactancia RLC - reproducidas en la parte izquierda de las **Figuras 5, 6 y 7**.

*Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*



**Figura 5:** Resistencia (forma compleja) - Comparación entre la representación 2D del *plano complejo* y la representación 3D del *sistema de coordenadas del cuaternión*.

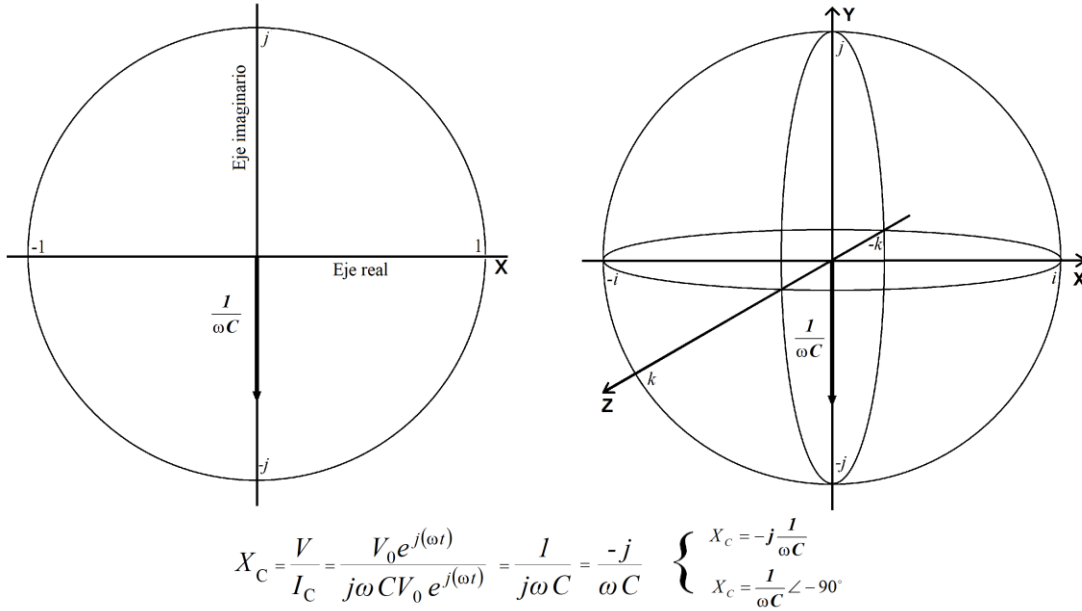
La representación de la parte derecha de la **Figura 5** muestra que el *vector resistencia* sigue alineado a lo largo del eje x, representado ahora por el *vector unitario*  $i = \sqrt{-1} = 1\angle 0^\circ$  en el *sistema de coordenadas del cuaternión*. El único cambio en las ecuaciones es que el *vector unitario*  $i$  se sustituye ahora al *vector unitario*  $j$  en las ecuaciones de resistencia.

Observe que esta sustitución del *vector unitario*  $j$  por  $i$  no afecta en absoluto a la solución numérica de las ecuaciones, ya que ambos *vectores unitarios* son iguales al mismo valor  $\sqrt{-1}$ . Algunos argumentarían que sería contraproducente utilizar  $i$  de este modo, ya que  $j$  se eligió en el contexto electrónico para representar  $\sqrt{-1}$  precisamente para evitar cualquier confusión entre el símbolo del *número irracional*  $i$  y el símbolo estándar  $I$  utilizado para representar la corriente.

El hecho de que la letra mayúscula  $I$  se utilice también como símbolo de corriente, mientras que la letra minúscula  $i$  se utiliza para el *número irracional*, en combinación con el contexto de uso, debería ser más que suficiente para evitar cualquier confusión.

Veamos ahora las representaciones comparativas de las formas complejas de reactancia capacitiva (**Figure 6**):

*Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*



**Figura 6:** Reactancia capacitiva (forma compleja) - Comparación entre la representación 2D del *plano complejo* y la representación 3D del *sistema de coordenadas del cuaternión*.

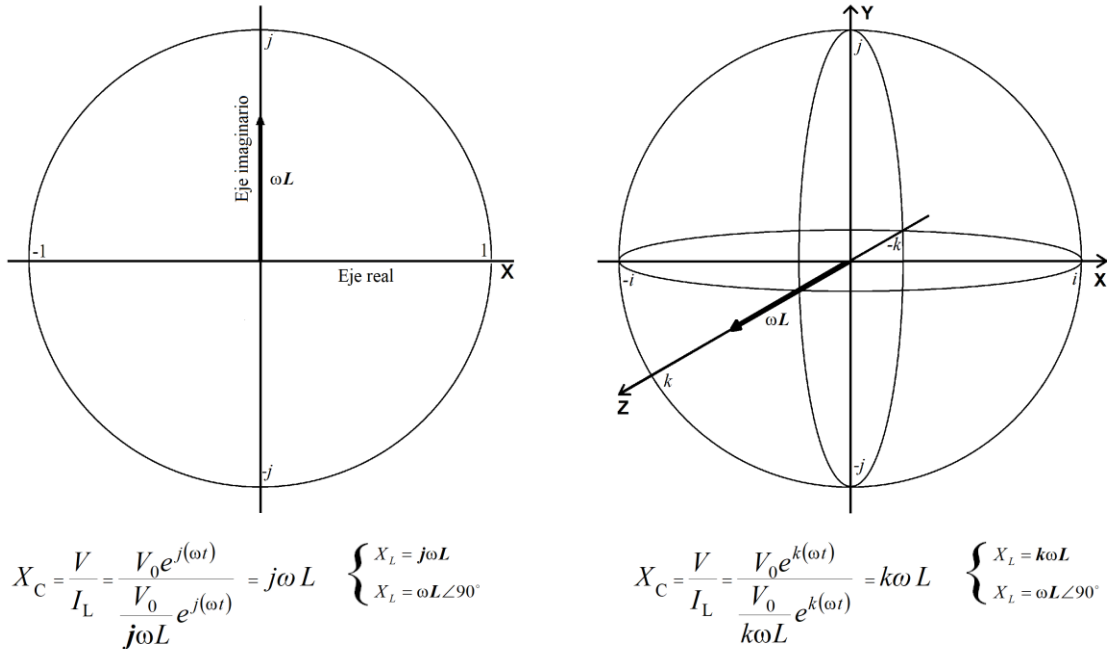
En la **Figura 6**, podemos ver que no hay ningún cambio entre la representación 2D del *plano complejo* y la representación 3D del *sistema de coordenadas del cuaternión*, puesto que el eje vertical del *plano complejo* ya estaba identificado por el  $j = \sqrt{-1} = 1 \angle 90^\circ$ . Por tanto, no es necesario modificar las ecuaciones.

Sin embargo, se observará un cambio importante para la ecuación de la impedancia, como se muestra en la **figura 7**. Está bien establecido en la teoría electromagnética y se confirma experimentalmente con facilidad que el campo magnético alrededor de un alambre, o bobina de alambre, se autoorienta perpendicularmente al campo eléctrico ( $\angle 90^\circ$ ).

De hecho, está bien establecido que cuando los electrones se ponen en movimiento en un alambre aplicándole un voltaje, se desarrolla instantáneamente un campo magnético macroscópico  $\mathbf{B}$  alrededor del alambre, que puede detectarse fácilmente de forma directa con una brújula magnética muy ordinaria, y cuya dirección alrededor del alambre es perpendicular de forma muy precisa a la dirección del movimiento del flujo de electrones en el alambre.

Los experimentos de Einstein-de Haas y Barnett realizados a principios del siglo XX [29] establecieron claramente que el establecimiento de un campo magnético  $\mathbf{B}$  a un nivel macroscópicamente medible relacionado con el movimiento del flujo de electrones se debe a la suma de los campos magnéticos locales individuales  $\Delta\mathbf{B}$  de la energía de momentum de cada electrón implicado, que existe a nivel de cada electrón en una relación invariante triplemente perpendicular, rígidamente mantenida con los correspondientes campos  $\Delta\mathbf{E}$  y su energía de momento  $\Delta\mathbf{K}$ , vinculada a la bien establecida relación de producto vectorial cruzado  $\mathbf{E}/\mathbf{B} = \mathbf{v}$  de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , como se muestra en la **Figura 2**.

*Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*



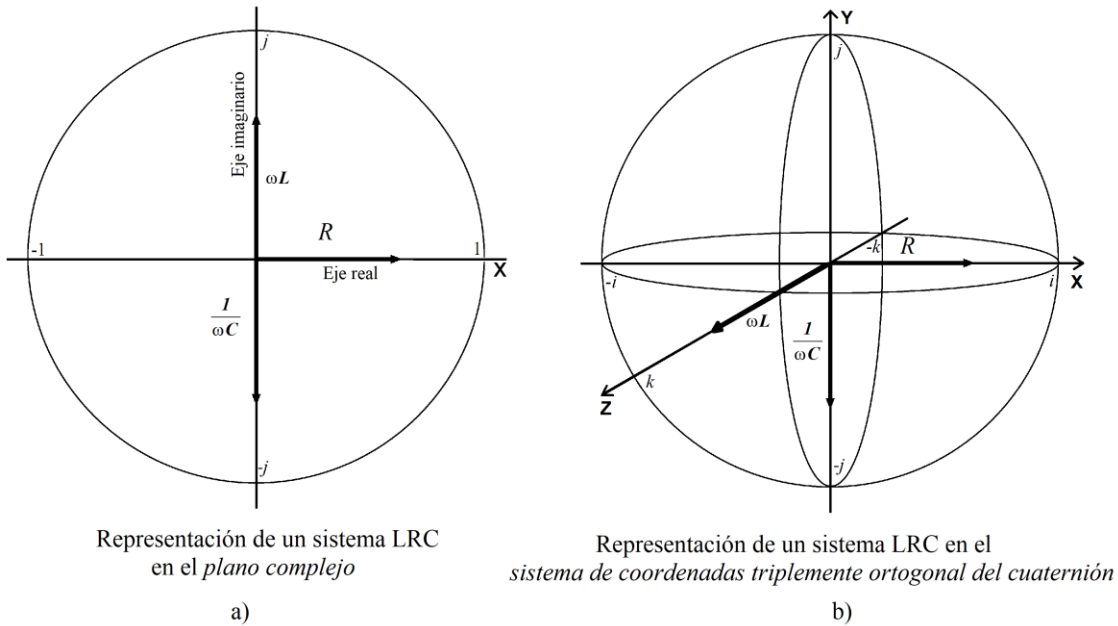
**Figura 7:** Reactancia inductiva (forma compleja) - Comparación entre las representaciones 2D del *plano complejo* y las representaciones 3D del *sistema de coordenadas del cuaternión*.

Por lo tanto, dado que el flujo de electrones iniciado por la aplicación de un voltaje al alambre – por supuesto que implica innumerables electrones en el alambre todos empezando a moverse en la misma dirección en la superficie del alambre – obligará a sus campos magnéticos individuales  $\Delta \mathbf{B}$  a alinearse todos en una dirección de espín magnético paralela aditiva perpendicular a la dirección de movimiento del flujo de electrones.

También está bien establecido que el flujo de electrones se produce en la superficie del alambre, permaneciendo cada electrón negativo en movimiento fuertemente atraído a lo largo de su progreso hacia el núcleo atómico positivo más cercano con el que se cruza en el alambre ; es decir, una dirección de interacción entre los electrones y los núcleos atómicos que establece los campos eléctricos locales  $\Delta \mathbf{E}$  como orientados perpendicularmente tanto a la dirección de movimiento del flujo de electrones en la superficie del alambre, por un lado, como a la dirección del campo  $\mathbf{B}$  macroscópico alrededor del alambre, por otro.

Esta triple ortogonalidad, representada tradicionalmente en la **Figura 2**, puede visualizarse ahora en el sistema de coordenadas triplemente ortogonal de la *hiperesfera* de Hamilton, como se muestra en los lados derechos de las **Figuras 5, 6 y 7**, agrupadas para su comparación en la **Figura 8**.

Comparando el sistema de *coordenadas* cartesianas tridimensionales de la **Figura 2**, utilizado tradicionalmente en la mecánica electromagnética para representar la bien establecida relación electromagnética triplemente *ortogonal*, con la representación de la **Figura 8b**, el lector puede ciertamente apreciar que la representación del *sistema de coordenadas triplemente ortogonal del cuaternión* es una representación más adecuada de esta relación vectorial que la del *plano complejo* bidimensional.



**Figura 8:** Representaciones comparativas de la estructura vectorial electromagnética del sistema RLC en el *plano complejo* 2D tradicional y en el *sistema triplemente ortogonal de las coordenadas del cuaternión*.

Así, una posible actualización de las formas complejas de las ecuaciones electrónicas LC y RLC desde la representación 2D del *plano complejo* a una representación 3D del *sistema de coordenadas del cuaternión* tendría la ventaja de representar correctamente la orientación vectorial de la componente L relacionada con el campo  $\mathbf{B}$  en los sistemas LC y RLC en su verdadero ángulo de desfase de  $\angle 90^\circ$  con respecto a la capacitancia de la componente relacionada con el campo  $\mathbf{E}$ . El *plano complejo* representa correctamente la relación ortogonal entre las dos componentes L y C como estando  $\angle 90^\circ$  desfasadas con respecto a la dirección del eje  $i$ -x, pero representa incorrectamente las componentes L y C como estando  $\angle 180^\circ$  desfasadas entre sí, de la única forma que el *plano complejo* 2D puede representarlas.

## 6. Análisis detallado del sistema de coordenadas 3D del cuaternión

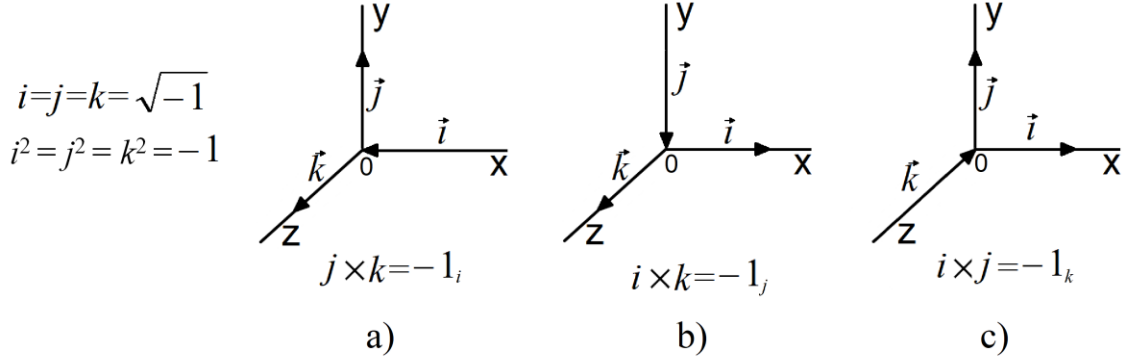
Volviendo a la Ecuación (13) que aísla el *sistema de coordenadas del cuaternión*, que implica las 3 coordenadas perpendiculares de la *hiperesfera* de Hamilton [ $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ], algunas otras características de este sistema de coordenadas merecen un examen más detallado. La primera observación es que cualquier producto vectorial cruzado de dos de estos *vectores unitarios* hace que se invierta la dirección de aplicación del tercer *vector unitario*, que se aplica en la tercera dirección perpendicular, como se ilustra en la Figura 9.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{c}\mathbf{j} \times d\mathbf{k} = d\mathbf{k} \times c\mathbf{j} = -b\mathbf{i} \quad (14)$$

*Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

$$i \times k = k \times i = -1_j \quad bi \times dk = dk \times bi = -c_j \quad (15)$$

$$i \times j = j \times i = -1_k \quad bi \times cj = cj \times bi = -d_k \quad (16)$$



**Figura 9:** Ilustración del producto cruzado de *vectores unitarios* definidos por estructura como  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  que da lugar a la inversión de la dirección de aplicación del tercer *vector unitario*.

Analicemos las implicaciones. Observando que el *vector unitario* perpendicular resultante de cada producto vectorial cruzado es un *vector unitario real negativo*, esto sólo puede significar que cualquier valor relacionado con este *vector unitario* como resultado del producto cruzado de los valores relacionados con los dos primeros *vectores unitarios complejos* se aplicará en la dirección opuesta, es decir, hacia el centro de la estructura triplemente ortogonal (**Figure 9**), ya que se define como aplicable entre el origen **0** y la distancia 1 desde el origen.

Con referencia a la Ecuación (14) y la **Figura 9a**, esto implicaría que un producto vectorial cruzado de los valores  $c_j$  y  $dk$  resultaría en una inversión de la dirección de aplicación del valor relacionado con el vector  $b_i$  invertido resultante ; que un producto vectorial cruzado de los valores  $bi$  y  $dk$  en la Ecuación (15) y la **Figura 9b** daría lugar a una inversión de la dirección de aplicación del valor relacionado con el vector resultante  $c_j$  y que un producto vectorial cruzado de los valores  $bi$  et  $cj$  en la Ecuación (16) y la **Figura 9c** daría lugar a una inversión de la dirección de aplicación del valor relacionado con el vector resultante  $d_k$ .

Por lo tanto, si situáramos un *sistema de coordenadas de referencia* idéntico al de la **Figura 8b**, con sus *vectores unitarios* definidos como  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  en el *centro-de-presencia* de una partícula elemental, y si la sustancia energía de la que está hecha esta partícula elemental tuviera características que le permitieran oscilar entre los dos estados vectoriales unitarios cuyo producto cruzado diera como resultado una inversión del sentido de aplicación del vector unitario perpendicular resultante, esto aclararía y confirmaría la dirección de aplicación del valor relacionado con el *vector unitario* invertido.

Resulta que las condiciones que de Broglie identificó en 1937 para que los fotones electromagnéticos localizados a lo largo de trayectorias precisas de mínima acción obedezcan a las ecuaciones de Maxwell [22], implican precisamente que la *sustancia energía* de la que están hechos estos fotones localizados, tal como la definió Einstein en su primer artículo de 1905 [30], debe ser necesariamente una *sustancia* de este tipo, cuyas

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

características requeridas se identificaron en las Referencias [10] [11].

Las condiciones identificadas por de Broglie ([22], p.277) eran que para satisfacer a la vez la estadística de Bose-Einstein y la ley de Planck, para explicar perfectamente el efecto fotoeléctrico obedeciendo al mismo tiempo a las ecuaciones de Maxwell y permaneciendo totalmente coherente con las propiedades de la teoría de la simetría de los corpúsculos complementarios de Dirac, el fotón localizado sólo podía explicarse si estaba constituido por dos partículas, o semifotones de espín  $1/2$ . Añadió que tal par complementario de partículas es susceptible de aniquilarse en contacto con la materia cediendo toda su energía, lo que explica perfectamente las características del efecto fotoeléctrico, y que al estar constituido por dos partículas elementales de espín  $h/4\pi$ , obedecerá a la estadística de Bose-Einstein como lo exige la precisión de la ley de Planck para el cuerpo negro, y finalmente que este modelo del fotón permite definir un campo electromagnético ligado a la probabilidad de aniquilación del fotón, campo que obedece a las ecuaciones de Maxwell y tiene todas las características de las ondas electromagnéticas de la luz.

Las características identificadas en las Referencias [10] [11] que debe tener la sustancia energía para que los fotones electromagnéticos localizados obedezcan a todo el conjunto de condiciones identificadas por de Broglie son la *incompresibilidad*, la *fluidez*, la *elasticidad* y una *tendencia-a-permanecer-siempre-en-movimiento*.

Volvamos ahora a esa otra conclusión de de Broglie citada anteriormente, según la cual la no individualidad de las partículas, el principio de exclusión y la energía de intercambio son tres enigmas íntimamente ligados a la imposibilidad de representar con precisión las entidades físicas elementales en el marco del espacio tridimensional continuo, o más generalmente, del espacio-tiempo cuatridimensional continuo. Esta conclusión está ligada a la imposibilidad de identificar cualquier manera mecánica lógica en la que esta sustancia energía podría establecerse en oscilación electromagnética interna entre los dos estados representados por los vectores unitarios  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  del sistema de coordenadas cartesianas 3D, dentro de los confines restringidos del espacio 3D normal, que explicaría coherentemente sus frecuencias medibles.

Tampoco ha sido posible establecer, dentro de los límites restringidos del espacio tridimensional normal, un método mecánico lógico que explicaría cómo fotones electromagnéticos con una energía superior a 1,022 MeV, supuestamente sin masa, consiguen dividirse en un par masivo de electrón y positrón., como se descubrió en la década de 1930 durante la primera detección de Anderson de positrones en su cámara de burbujas [31], una ocurrencia de la cual fue claramente registrada durante el experimento FERMILAB E-632, como se analiza en la Referencia [32], que se llevó a cabo en la cámara de burbujas de 15 pies de FERMILAB [33].

Tampoco ha sido posible dar una explicación mecánica de la carga eléctrica unitaria invariante del electrón y del positrón, ni de las cargas fraccionarias de los tres componentes internos colisionables de protones y neutrones.

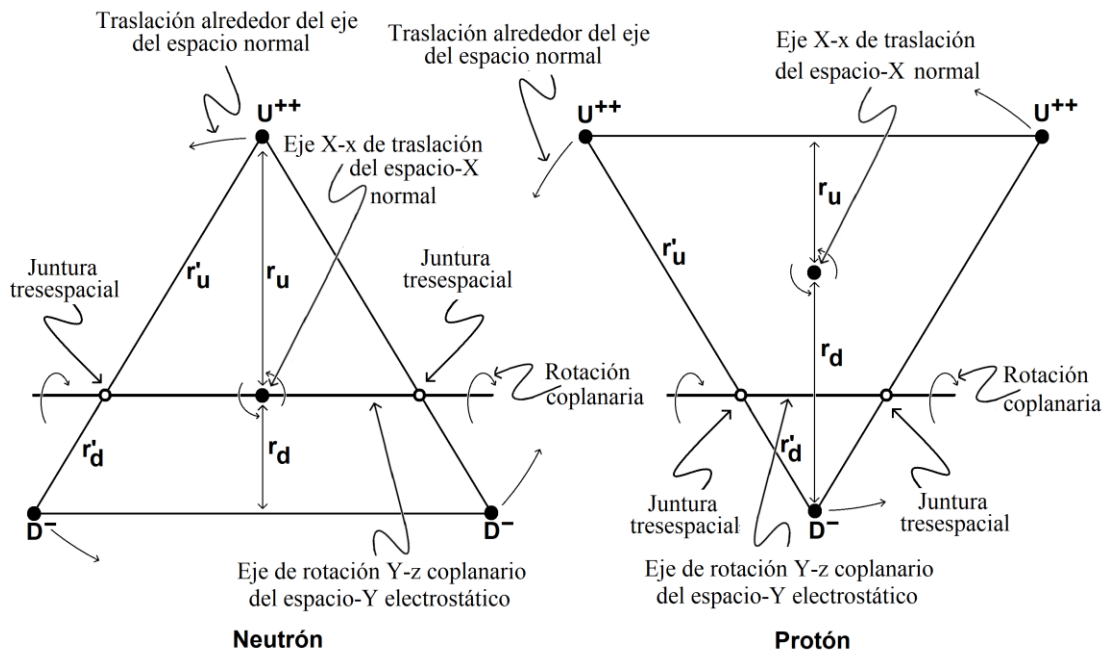
Tampoco ha sido posible dar una explicación mecánica de la interacción de espín *magnético* relativo entre electrones cargados que les permite emparejarse en orientación atractiva antiparalela para establecer enlaces covalentes entre átomos a pesar de sus cargas eléctricas repulsivas iguales del mismo signo, en pares para llenar orbitales de electrones en átomos y en pares de Cooper de movimiento libre, y finalmente en

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

orientación de espín paralelo repulsivo por defecto relativo para impedir que los electrones se estrellen contra los núcleos atómicos en los átomos.

Tampoco ha sido posible establecer, dentro de los confines restringidos del espacio tridimensional normal, un método mecánico lógico para explicar la estabilización de estructuras formadas por tres subcomponentes de protones y neutrones colisionables como se ha observado, siendo el protón permanentemente estable y el neutrón volviéndose inestable cuando se aísla, es decir, dos estructuras que, para seguir siendo coherentes con la naturaleza electromagnética de sus tríadas de subcomponentes colisionables, deben rotar y trasladarse mecánicamente de forma simultánea en dos direcciones perpendiculares en torno a dos ejes de rotación/traslación mutuamente perpendiculares que se intersectan en la estructura del neutrón, lo que explica su inestabilidad cuando está aislado, y no se intersectan en la estructura del protón, lo que explica su estabilidad, como se analiza en la Referencia [32].

Para facilitar a los lectores el conocimiento del inesperado estado de movimiento interno de los nucleones, las ilustraciones utilizadas en la Referencia [32] en el contexto del análisis y publicación en 2013 de las estructuras internas colisionables de los tres subcomponentes colisionables del protón y del neutrón, se reproducen aquí en la **Figura 10**, representando los subcomponentes electromagnéticos cargados colisionables involucrados sólo por sus *centros-de-presencia*, sin ilustrar sus complejos vectoriales tresespaciales, que han sido puestos a disposición en las Referencias [13] [14] en el contexto del establecimiento del campo vectorial común de las mecánicas electromagnética y cinemática [14].



**Figura 10:** Ejes de rotación y traslación de las tríadas de subcomponentes colisionables de protones y neutrones.

## 7. La geometría tresespacial

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

Presentada por primera vez en un libro de divulgación en 1999 – que se volvió a publicar en 2012 en formato EBook [34] – la geometría espacial más extendida que de Broglie había intuido que era necesaria, proporcionando la solución a estos procesos mecánicos que había concluido que eran imposibles de establecer dentro de los confines de nuestro espacio 3D normal, se presentó después en julio de 2000 en el Congreso-2000 celebrado en la Universidad Estatal de San Petersburgo [23], y finalmente se publicó formalmente en abril de 2013 en la Referencia [35].

Esta geometría espacial mas amplia permitió explicar las frecuencias de los fotones localizados mediante una oscilación mecánica de la mitad de la energía de un fotón entre el estado de campo  $E$  y el estado de campo  $B$ , de acuerdo con la interpretación inicial de Maxwell de la inducción recíproca mutua de ambos campos en un plano transversal a su dirección de movimiento, como se analiza en las Referencias [13] [14].

También permitió explicar cómo la cantidad total de energía de un fotón en movimiento libre de energía superior a 1,022 MeV podía convertirse en un par *masivo* de electrón y positrón transfiriendo mecánicamente toda su energía a un plano perpendicular al espacio normal [26].

También ha proporcionado una explicación mecánica para un problema que no puede resolverse en el espacio tridimensional normal al movimiento de rotación/traslación de las tríadas internas de los nucleones en torno a dos ejes que se intersectan perpendicularmente en la estructura del neutrón, lo que explica su inestabilidad cuando está aislado, pero que no se intersectan permaneciendo perpendiculares entre sí en la estructura del protón, lo que explica la estabilidad total del protón [32].

Esta geometría espacial ampliada también ha hecho posible proporcionar una explicación mecánica para la carga eléctrica unitaria invariante del electrón y del positrón, así como una explicación mecánica para las cargas fraccionarias de los tres subcomponentes internos colisionables de protones y neutrones, como se analiza en la Referencia [32].

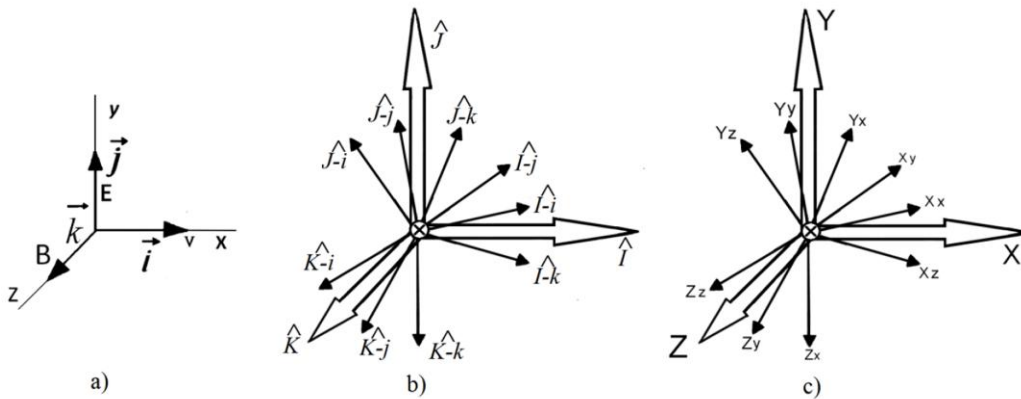
También proporcionó una explicación mecánica a la interacción de espín *magnético* relativo que permite a los electrones cargados emparejarse en orientación atractiva antiparalela para establecer enlaces covalentes entre átomos a pesar de sus cargas eléctricas repulsivas del mismo signo, en pares para llenar orbitales electrónicos en los átomos y en pares de Cooper de movimiento libre, y finalmente en orientación de espín paralelo repulsivo por defecto relativo para impedir que los electrones choquen contra los núcleos atómicos en los átomos, como confirmó el experimento que subyace al desarrollo de la geometría tresespacial [26].

Presentada brevemente, esta solución se deriva de la ortogonalidad vectorial triple invariante establecida desde hace tiempo del producto vectorial cruzado de los vectores de los campo  $E$  y  $B$ , tan fundamental en electromagnetismo (**Figure 11a**). Cuando los vectores menores  $j$  y  $k$  del espacio normal que representa los campos  $E$  y  $B$  en el electromagnetismo clásico se expanden para convertirse en espacios vectoriales mayores 3D completamente expandidos, representados por los *vectores mayores*  $J$  y  $K$ , cada uno con su propio conjunto interno de *vectores menores*  $ijk$ , entonces surge un espacio normal vectorial mayor 3D completamente expandido representado por un *vector mayor*  $I$  mediante el producto vectorial cruzado de los *vectores mayores*  $J$  y  $K$ , que también mantiene su habitual conjunto interno de *vectores menores*  $ijk$  (**Figures 11b et 11c**).

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

Esta geometría completamente nueva del espacio vectorial ha hecho posible representar lógicamente no sólo fotones en movimiento libre según las condiciones de de Broglie, sino también explicar mecánicamente cómo tales fotones de suficiente energía pueden desacoplarse en pares *masivos* de electrones y positrones [26], y también explicar mecánicamente cómo tríadas suficientemente térmicas de electrones y positrones pueden acelerarse hasta estabilizarse como las tríadas más energéticas de configuraciones de partículas electromagnéticas elementales que pueden existir en el universo, es decir, protones y neutrones [32], y cuya intensidad electromagnética de su nuevo entorno explicaría la deformación de sus características de masa y carga hacia sus estados observados.

El punto común de origen  $\mathbf{0}$  de los tres espacios vectoriales ortogonales se conceptualice entonces como un volumen infinitesimal  $dV$  a través del cual la energía de un quantum localizado, percibido ahora como una cantidad local de *sustancia energía* físicamente existente, puede ahora transitar entre los tres espacios como si fueran vasos comunicantes, para establecer el estado de equilibrio requerido por simetría, y cuya sección transversal infinitesimal  $ds$  sirve de punto de apoyo contra el cual la mitad del quantum de energía puede ejercer su presión para hacer que la otra mitad se mueva en el espacio – oscilando transversalmente en un modo estacionario en un plano perpendicular a la dirección de este movimiento en el espacio – cuando el entorno electromagnético local lo permite. Así es como surgió, a efectos de visualización, el espacio vectorial aumentado  $3 \times 3D+1$  que subyace al modelo tresespacial, con el elemento  $+1$  representando, por supuesto, la dimensión temporal, que se analiza en la Referencia [36].



**Figura 11:** Conjunto de vectores unitarios mayores y menores aplicables a la geometría tresespacial.

La dificultad para nosotros de visualizar mentalmente más de tres dimensiones perpendiculares a la vez se resuelve tratando cada uno de los espacios vectoriales 3D mayores  $\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K}$  como si fueran paraguas plegados con tres costillas que se encuentran perpendicularmente en sus extremos, que, al plegarse, reducen el conjunto de espacios vectoriales mayores  $3 \times 3D$  a la representación vectorial 3D básica de la **Figura 11a**, y si el conjunto de *vectores unitarios mayores*  $\mathbf{I} = \mathbf{J} = \mathbf{K} = 1$  se sustituye por un conjunto de *vectores unitarios mayores*  $\mathbf{I} = \mathbf{J} = \mathbf{K} = \sqrt{-1} = 1 \angle 90^\circ$  en la **Figura 11b**, el *vector unitario mayor*  $\mathbf{I}$  invertirá su dirección de aplicación cuando se aplique el producto cruzado de los *vectores unitarios mayores*  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  (vectores  $\mathbf{J} \times \mathbf{K} = -\mathbf{I}$ ) y la energía de momentum ligada al vector unitario  $\mathbf{I} = \sqrt{-1} = -1 \angle 180^\circ$  estará correctamente orientada para aplicar eficazmente

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

su presión contra la superficie infinitesimal  $ds$  impulsando la energía inerte oscilante transversalmente presente a través de la unión que separa los tres espacios, lo que sería coherente con el resultado de la Ecuación (14), como se muestra en la **Figura 9a**.

Basta con abrir los paraguas uno a uno para visualizar en secuencia el movimiento de la *sustancia energía* que circula en cada espacio vectorial 3D del conjunto.

El producto cruzado de los vectores  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , tal como se establece tradicionalmente en el sistema clásico de coordenadas cartesianas que implica vectores unitarios  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=1$  (**Figura 2**, reproducida en la **Figura 11a**), parecería dejar el vector resultante como aplicándose en la dirección positiva  $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$ , pero esto en realidad lo deja indefinido porque un *vector unitario* definido como  $\mathbf{i}=1$  no es fundamentalmente direccional mientras que un *vector unitario* definido como  $\mathbf{i}=\sqrt{-1}=-1\angle 180^\circ$  es direccional por estructura, lo que confirmaría claramente su dirección inversa de aplicación, es decir, para que el elemento relacionado con el *vector unitario ahora real* ( $-1\angle 180^\circ$ ); se represente geoméricamente como aplicando su presión contra los dos elementos representados por los dos *vectores unitarios complejos*  $\mathbf{j}\times\mathbf{k}$  que ahora intervienen en el producto vectorial cruzado relacionado.

Desde dentro del espacio X normal real, toda la energía presente dentro de los espacios Y y Z electrostáticos y magnetostáticos complejos en cualquier momento dado de cada ciclo de la frecuencia electromagnética de la sustancia cuántica implicada parecerá poseer inercia longitudinal y transversal, es decir, inercia omnidireccional. En otras palabras, parecerá poseer masa electromagnética. Metafóricamente hablando, la energía presente en estos dos espacios complejos adicionales se comportaría como si estuviera cautiva dentro de algún contenedor invisible que se resistiera a ser empujado desde cualquier dirección desde dentro del espacio X normal real, con la energía de momentum unidireccional presente en el espacio X ejerciendo su presión contra su *centro-de-presencia*, como se analiza en las Referencias [10] [11].

## 8. El fotón electromagnético

Este resulta ser también el caso de la componente de momentum  $[(hc/2\lambda)_x \mathbf{I} \mathbf{i}]$  del fotón electromagnético localizado de doble-partícula definido según las condiciones de Louis de Broglie, que dieron lugar al establecimiento de su Ecuación LC (17). Publicada por primera vez en 2004 en un libro de divulgación [37] ampliamente distribuido en formato de bolsillo en los departamentos de física de numerosas instituciones, esta ecuación y sus derivadas relacionadas fueron luego publicadas formalmente en 2013 en la Referencia [35], y reeditadas en 2016 en la Referencia [10] para explicar todos los aspectos de su origen ontológico:

$$\mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{i} = \left( \frac{hc}{2\lambda} \right)_x \mathbf{I} \mathbf{i} + \left[ 2 \left( \frac{e^2}{4C} \right)_y (\mathbf{J} \mathbf{j}, \mathbf{J} \mathbf{j}) \cos^2(\omega t) + \left( \frac{L \mathbf{i}^2}{2} \right)_z \mathbf{K} \sin^2(\omega t) \right] \quad (17)$$

en la cual:

$$C = 2\varepsilon_0 \alpha \lambda \quad L = \frac{\mu_0 \alpha \lambda}{8\pi^2} \quad \mathbf{i} = \frac{2\pi e c}{\alpha \lambda} \quad (18)$$

así como su equivalente que involucra los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , establecido en términos del producto vectorial cruzado de la Ecuación (14), es decir,  $c\mathbf{j} \times d\mathbf{k} = -\mathbf{b}_j$ :

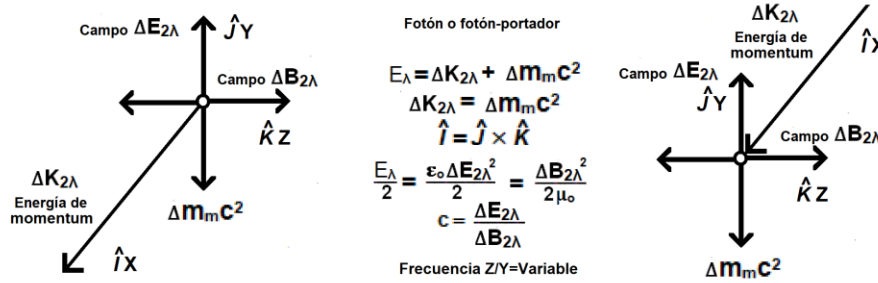
*Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

$$\vec{E} \vec{I} \vec{i} = \left( \frac{hc}{2\lambda} \right)_x \vec{I} \vec{i} + \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_{2\lambda}^2}{4} \right)_Y (\vec{J} \vec{j}, \vec{J} \vec{j}) \cos^2(\omega t) + \left( \frac{\mathbf{B}_{2\lambda}^2}{2\mu_0} \right)_Z \vec{K} \sin^2(\omega t) \right] \vec{V}_{2\lambda} \quad (19)$$

en la cual:

$$\mathbf{E} = \frac{\pi e}{\epsilon_0 \alpha^3 \lambda^2} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \pi e c}{\alpha^3 \lambda^2} \quad \mathbf{V} = \frac{\alpha^5 \lambda^3}{2\pi^2} \quad (20)$$

Esta triple relación ortogonal entre los campos  $E$  y  $B$  del fotón, perpendiculares entre sí, representando también a sus homólogos  $L$  y  $C$ , impulsados por su energía de momentum  $\Delta K$ , fue ilustrada por la imagen de la izquierda de la **Figura 12** en las Referencias [13][14] :



**Figura 12:** Complejo vectorial tresespacial de un fotón o de un fotón-portador.

Por supuesto, podría argumentarse que las Ecuaciones (17) y (19) revelan que el valor  $b$  relacionado con el vector  $ix$  debería representarse visualmente como la aplicación de una presión directa contra el *centro-de-presencia* de la partícula – que coincide con la posición  $0$  del *sistema de coordenadas de referencia* – como ilustra provisionalmente la representación de la derecha de la **Figura 12**, pero dado que esta relación se ilustró directamente con la **Figura 13** que la acompaña sistemáticamente, se consideró que la representación de la izquierda transmite la misma idea vectorial a la vez que aísla más claramente el centro de la relación triplemente ortogonal, que coincide con la posición  $0$  del sistema de coordenadas, y que es el lugar común del origen o punto de aplicación del conjunto de vectores que describen la estructura interna del fotón de doble partícula de de Broglie. Desde este punto de vista, la Ecuación (16), por ejemplo, podría reformularse como sigue:

$$\vec{E} \vec{I} \vec{i} = \left( 0, (-I/i) \frac{hc}{2\lambda} \right)_x + \left[ \left\{ \left( 0, (J//j) \frac{e^2}{4C} \right) + \left( 0, (J// - j) \frac{e^2}{4C} \right) \right\} \cos^2(\omega t) + \left\{ \left( 0, (K//ijk) \frac{L i^2}{2} \right) + \left( 0, (K// - i - j - k) \frac{L i^2}{2} \right) \right\} \sin^2(\omega t) \right]_z \quad (21)$$

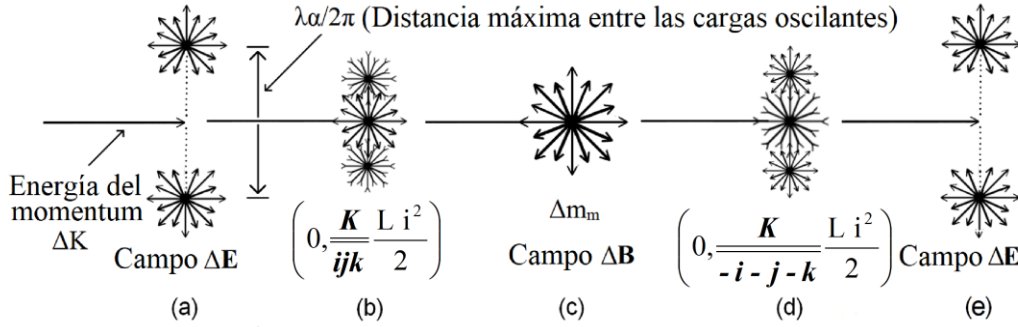
En el que los *vectores unitarios mayores*  $\mathbf{I}=\mathbf{J}=\mathbf{K}=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  representan los 3 espacios mutuamente ortogonales de la geometría tresespacial, y los tres conjuntos de *vectores unitarios menores*  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  representan los sistemas de coordenadas tridimensionales interiores de cada espacio, y que las representaciones vectoriales  $(\mathbf{I//i}, \mathbf{J//j}, \mathbf{J// - j}, \mathbf{K//ijk}, \mathbf{K// - i - j - k})$  relacionan el *vector* o *vectores unitarios menores* del espacio interior subordinados al *vector unitario mayor* local  $\mathbf{I}$   $\mathbf{J}$  o  $\mathbf{K}$  del espacio en cuestión.

La configuración vectorial  $(\mathbf{K//ijk})$  representa la fase de expansión esférica de la

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

componente magnética de la energía del fotón hacia una presencia máxima en el espacio Z magnetostático (**Figura 13b**), mientras está en proceso de evacuar el espacio Y (**Figura 13a**), mientras que la configuración vectorial ( $\mathbf{K}/-i-j-k$ ) representa su fase de regresión esférica hacia una presencia nula en el espacio Z magnetostático (**Figura 13d**), mientras vuelve a entrar en el espacio Y en forma de cargas gemelas que se alejan una de otra en el espacio Y (**Figura 13e**) hasta una presencia y separación máximas en el espacio Y, lo que inicia el siguiente ciclo de su oscilación.

La relación entre la polarizabilidad de los fotones electromagnéticos y el aspecto de doble partícula de su estado de campo  $E$  en el espacio Y, ilustrado en la **Figura 13a**, se analiza en las Referencias [10] [11].



**Figura 13:** Representación del ciclo estacionario de oscilación transversal del semicuantum electromagnético de un fotón en movimiento libre o de un fotón-portador de un electrón.

Ahora podemos formular la Ecuación (17) según la configuración del producto vectorial cruzado que emerge del *sistema de coordenadas de referencia del cuaternión* de la Ecuación (13), según la cual:

$$b = \left( \frac{hc}{2\lambda} \right)_{-x_i}, \quad c = 2 \left( \frac{e^2}{4C} \right)_{jY}, \quad d = \left( \frac{L i^2}{2} \right)_{kZ} \quad (22)$$

y finalmente:

$$E = |-b_x| + [cj \cos^2(\omega t) + dk \sin^2(\omega t)] \quad (23)$$

En la que  $-b$  representa la energía del momento que ejerce presión sobre el *centro-de-presencia* de la partícula visualizada como un fulcro infinitesimal  $ds$  contra la que se puede aplicar esta presión (Ecuación (14) y **Figura 9a**) como se describe en las Referencias [13] [14], impulsando a la velocidad de la luz en el vacío las componentes  $c$  y  $d$  de la Ecuación (23) que están en constante oscilación en el plano  $\mathbf{JK}$  perpendicular a su dirección de movimiento en el espacio X, a través del ya mencionado volumen infinitesimal  $\Delta V$  que constituye la unión entre los tres espacios vectoriales en el punto  $\mathbf{0}$  del producto cruzado  $\mathbf{J} \times \mathbf{K} = \mathbf{I}$ , en la **Figura 11b** que establece los vasos comunicantes característicos del conjunto.

## 9. La masa en reposo del electrón y su carga eléctrica

Hay un último caso de producto vectorial cruzado para poner en perspectiva, ilustrado por la Ecuación (15) y la **Figura 9b**.

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

Este caso se refiere a la mecánica de desacoplamiento de un fotón electromagnético sin masa de 1,022 MeV o más en un par de dos partículas masivas de signos eléctricos opuestos con masas iguales ( $m_0=8,18710414E-14$  julios/ $c^2=0,511$  MeV/ $c^2$ ) y cargas eléctricas iguales ( $e=1,602176462E-19$  Coulomb). El valor de la energía que constituye la masa en reposo del electrón o positrón en megaelectronvoltios (0,511 MeV) se obtiene dividiendo el valor de la masa en julios por el valor de la carga unitaria invariante del electrón ( $8,18710414E-14 \div 1,602176462E-19=0,5109989027$  MeV).

El proceso de desacoplamiento del fotón implica la transferencia de la mitad del momentum de la energía de este fotón electromagnético en la misma orientación transversal que su otra mitad, tal como se describe con las Ecuaciones (17) o (19), con una longitud de onda ( $\lambda$ ) igual a la mitad de la longitud de onda de Compton de la energía de la *masa en reposo* del electrón ( $\lambda_c=2,426310215E-12$  metro) que ya caracteriza la mitad de la energía del fotón electromagnéticamente oscilante.

Las dos ecuaciones LC que describen partículas masivas desacopladas – un electrón y un positrón – se publicaron formalmente en 2013 en la Referencia [26].

Para la *masa en reposo* del positrón:

$$E \vec{\theta} = m_e c^2 \vec{\theta} = \left[ \frac{hc}{2\lambda_c} \right]_Y \vec{J} \vec{i} + \left( 2 \left[ \frac{(e')^2}{4C_c} \right]_X (\vec{I} \vec{j}, \vec{I} \vec{j}) \cos^2(\omega t) + \left[ \frac{L_c i_c^2}{2} \right]_Z \vec{K} \sin^2(\omega t) \right) \quad (24)$$

Y para la *masa en reposo* del electrón::

$$E \vec{\theta} = m_e c^2 \vec{\theta} = \left[ \frac{hc}{2\lambda_c} \right]_Y \vec{J} \vec{i} + \left( 2 \left[ \frac{(e')^2}{4C_c} \right]_X (\vec{I} \vec{j}, \vec{I} \vec{j}) \cos^2(\omega t) + \left[ \frac{L_c i_c^2}{2} \right]_Z \vec{K} \sin^2(\omega t) \right) \quad (25)$$

En el mismo artículo, también se propuso la ecuación equivalente utilizando los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  correspondientes para la *masa en reposo* del electrón, mencionando que la ecuación equivalente para el positrón era idéntica, excepto por la orientación de su vector unitario menor en el espacio Y electrostático [ $\vec{J} \vec{i}$  para el positrón y  $\vec{J} -\vec{i}$  para el electrón, como en las Ecuaciones (24) y (25)]:

$$m_e c^2 \vec{\theta} = \left[ \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \mathbf{v} \right]_Y \vec{J} \vec{i} + \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_0 \mathbf{V}^2}{4} \right)_X (\vec{I} \vec{j}, \vec{I} \vec{j}) \cos^2(\omega t) + \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)_Z \vec{K} \sin^2(\omega t) \right] \mathbf{v} \quad (26)$$

El vector  $\theta$  relacionado con la energía total de cada partícula masiva se refiere al hecho de que toda la energía de la *masa en reposo* invariante del electrón y del positrón está físicamente orientada perpendicularmente al *espacio normal* X, lo que significa que no hay ninguna energía de su *masa en reposo* disponible para propulsarla a través del *espacio normal* X, lo que está directamente relacionado con el descubrimiento de Schrödinger mencionado anteriormente, de que la componente  $\Psi_{(r, t)}$  de su ecuación de onda (2) debería estar orientada de algún modo perpendicular a su dirección de movimiento, que entonces se supuso que era a lo largo de la trayectoria de Bohr en el átomo de Bohr en estado fundamental, que se estableció en su ecuación mediante el uso del *vector unitario girado perpendicularmente*  $i=\sqrt{-1}=1 \angle 90^\circ$ .

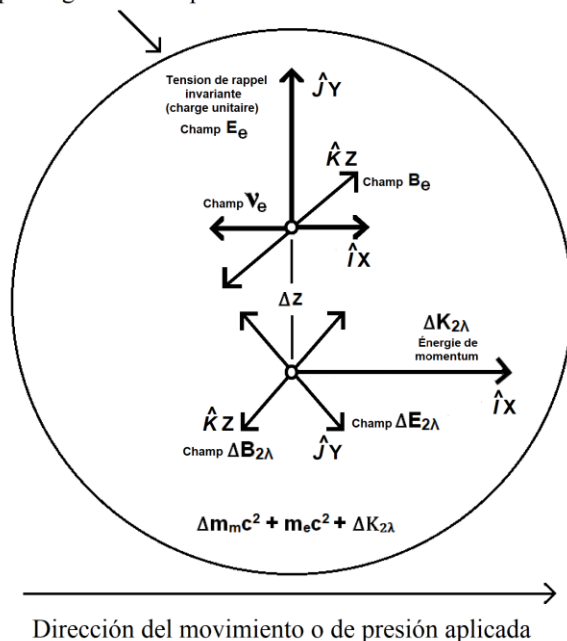
El análisis y la descripción del componente de energía *neutrónica* del término  $(\ )_X$  en las Ecuaciones (24), (25) y (26) se dan en la Referencia [38].

Como se discute en las Referencias [13] [14] y se ilustra en la **Figura 14**, un fotón portador como el descrito por las Ecuaciones (17) y (19) debe estar asociado con la masa

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

en reposo del electrón o del positrón para que puedan moverse en el espacio normal.

Campo magnético compuesto oscilante del electrón en movimiento



**Figura 14:** Complejo vectorial tresespacial de la *masa relativista* del electrón en movimiento y de su energía de momento.

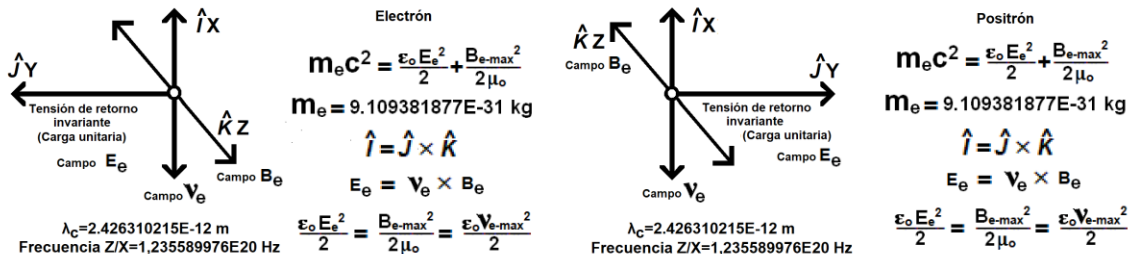
Como se discute en las Referencias [13] [14], es la energía de momentum  $\Delta K$  proporcionada por este fotón portador lo que la Ecuación de de Broglie (1) y la Ecuación de Schrödinger (2) nos permiten calcular para cada orbital permitido del átomo de hidrógeno, correspondiente al concepto de onda piloto introducido por de Broglie, que permite a la partícula moverse en el espacio normal.

Como todas las demás ecuaciones LC y  $E/B$ , incluidas las que describen los subcomponentes internos colisionables de los protones y neutrones [32], establecidas en el contexto de la geometría tresespacial, las Ecuaciones (24), (25) y (26) que describen la *masa en reposo* de los electrones y positrones pueden reformularse para relacionar sus complejos vectoriales locales con el origen  $\mathbf{0}$  – o con la posición de unión  $ds$  o  $dV$  coincidente con sus *centros-de-presencia* – de cada uno de sus sistemas de coordenadas tresespaciales locales (**Figura 11b**), como se hizo con la Ecuación (21) para ambas Ecuaciones (17) y (19), y como ilustran sus representaciones en la **Figura 15**, en la que el *vector de tensión de carga* del electrón está orientado a la izquierda por convención para representar su dirección negativa de aplicación, mientras que el *vector de tensión de carga* del positrón está orientado a la derecha para representar su dirección positiva de aplicación [26] [13] [14].

La geometría tresespacial arroja inmediatamente nueva luz sobre la cuestión del signo de las cargas eléctricas, ya que ahora "vivirían" en un espacio Y separado, como se analiza en las Referencias [39] [40]. La carga eléctrica de las partículas elementales puede representarse ahora como un vector de signo negativo, positivo o cero en el espacio Y. La carga del electrón equivaldría entonces a una *presión de momentum invariante* en la dirección negativa a lo largo del eje Y-x, y la del positrón a una *presión*

### Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial

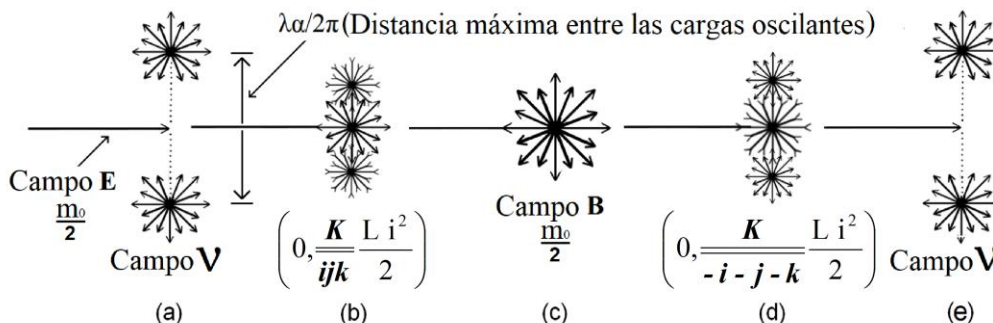
de momentum invariante en la dirección positiva a lo largo del mismo eje Y-x, y el signo cero de las cargas de los semifotones de de Broglie se explicaría por estas cargas variables de signos opuestos que oscilan en direcciones opuestas en el plano Y-y/Y-z perpendicular al eje Y-x, un plano en el que son polarizables en cualquier dirección alrededor del origen  $\mathbf{0}$ , como se pone en perspectiva en las Referencias [10] [11].



**Figura 15:** Complejos vectoriales tresespaciales de las masas en reposo invariantes del electrón y del positrón.

El aspecto de la tensión restauradora de las cargas invariantes de los electrones y positrones con respecto a la fuerza restauradora de Coulomb se analiza en las Referencias [13] [14]. Las cargas fraccionarias de los subcomponentes internos colisionables de los protones y neutrones se analizan en la Referencia [32].

Si comparamos cuidadosamente la **Figura 13**, que representa la oscilación transversal estacionaria de los fotones electromagnéticos o fotones portadores, con la **Figura 16**, que representa la oscilación transversal estacionaria de la energía de la masa en reposo del electrón o positrón, podemos ver que mientras la mitad de la energía del fotón oscila entre el estado de campo  $E$  de doble-partícula en el espacio Y y el estado de campo  $B$  de componente único en el espacio Z, la mitad de la energía del electrón o positrón oscila entre el estado de campo  $v$  de doble-partícula en el espacio X y el estado de campo  $B$  de componente único en el espacio Z.



**Figura 16:** Representación de la oscilación cíclica de la mitad de la energía de la masa en reposo del electrón entre su estado magnético  $B$  y su estado neutrínico de doble-carga  $v$ , mientras que la otra mitad constituye la energía invariante de su campo  $E$ .

La misma configuración magnética vectorial  $(K//ijk)$  más  $(K//-i-j-k)$  que para el fotón electromagnético (**Figura 13**), que representa las fases de expansión y regresión esférica de la componente magnética de la energía del electrón, puede verse en la ecuación (26) y en la **Figura 16**. Esta relación entre el comportamiento de la fase de oscilación magnética del electrón y el espín del electrón se descubrió tras el experimento realizado en 1998 y

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

analizado en la Referencia [26], que desencadenó el desarrollo de la geometría tresespacial. El análisis del establecimiento mecánico del enlace molecular covalente, el llenado de los orbitales de electrones con pares de electrones, la generación de pares de Cooper y la interpretación del experimento de Stern-Gerlach se publicaron en la referencia [14].

Como ya se ha mencionado, comparando las **Figuras 13** y **16** con las ecuaciones LC correspondientes – Ecuación (17) para la **Figura 13** y Ecuaciones (24) y (25) para la **Figura 16** – se puede observar que mientras que la energía del fotón oscila entre los espacios Y y Z, la de las partículas masivas electrón y positrón oscila entre los espacios X y Z, como se analiza y pone en perspectiva en la Referencia [26].

Esto llama la atención sobre el producto cruzado de la Ecuación (14), como se ilustra en la **Figura 9a**, que estructura la Ecuación (17) de forma que el producto cruzado de los *vectores unitarios mayores J y K* hace que la presión del *vector unitario* de momentum del fotón se dirija hacia su *centro-de-presencia* en lugar de alejarse de él, con el fin de explicar correctamente el hecho de que el *vector de energía de momentum* ligado al *vector unitario mayor* resultante  $\mathbf{I}=-1\mathbf{I}$  aplica ahora su presión contra el *centro-de-presencia* de la partícula para propulsarla a la velocidad de la luz en el vacío en el caso de los fotones electromagnéticos, una velocidad de la luz debida al hecho de que la cantidad de energía propulsada es *siempre exactamente igual por simetría* a la cantidad de energía de propulsión, como se demuestra matemáticamente en la Referencia [41].

El examen de las Ecuaciones (24) y (25) revela que en el caso de partículas masivas, subordinadas al vector unitario mayor J del espacio Y, se trata más bien del producto cruzado de los *vectores unitarios menores J j* y *J k*, con el resultado de que el *vector unitario menor* de momento  $\mathbf{J i}$  – en el plano Y-y/Y-x del espacio Y – del electrón y del positrón, está orientado en direcciones opuestas, ejerciendo presión hacia el espacio normal X para el positrón y ejerciendo presión alejándose del espacio normal para el electrón. En la geometría tresespacial, es esta presión invariante ejercida en direcciones opuestas hacia o lejos del espacio normal X la que se mide como las cargas invariantes y opuestas del electrón y del positrón. La presión ejercida por las cargas fraccionarias de los subcomponentes colisionables de los protones y neutrones se analiza en la Referencia [32].

## **10. Más allá de la fisión y de la fusión de los núcleos atómicos**

La geometría tresespacial también ha permitido prever la posibilidad de generar niveles de energía muy superiores a los de la fusión de núcleos atómicos, como se analiza en las referencias [42] [43] [44], identificando medios mecánicos por los que podrían producirse potencialmente neutrones y protones haciendo que tríadas de electrones y positrones lo suficientemente térmicos y en suficiente proximidad, interaccionen para que se capturen mutuamente en tríadas  $e^+ e^+ e^-$  y  $e^- e^- e^+$ , con una energía insuficiente para escapar de su interacción mutua, como se describe en la Referencia [32].

De las conclusiones extraídas del análisis de la formación de estas tríadas en la referencia [32], se desprendería que los tres subcomponentes colisionables y cargados de los protones y neutrones podrían ser simplemente electrones y positrones muy normales cuyas características de masa y carga han sido simplemente alteradas por la intensidad

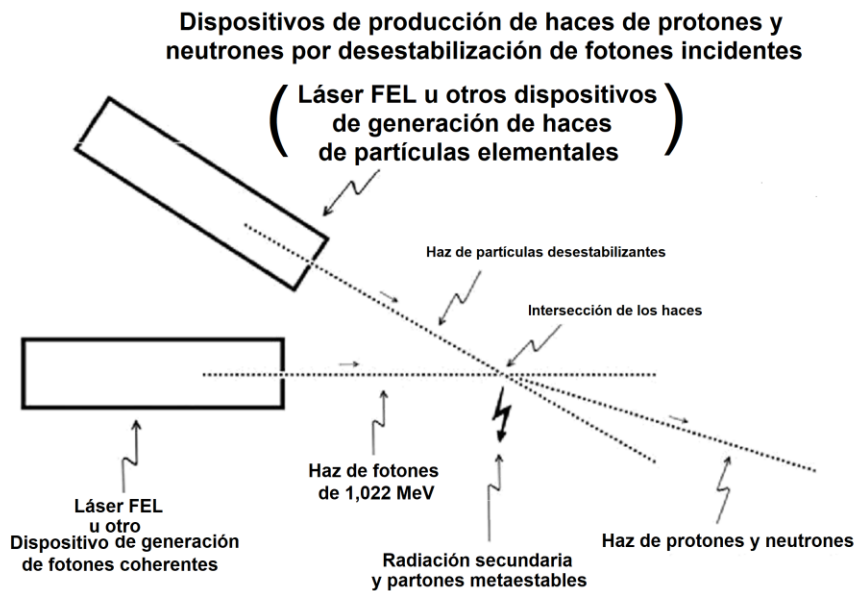
### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

del entorno electromagnético en el que se estabilizan cuando alcanzan su estado de equilibrio final, es decir, los niveles de energía estables más intensos que existen a nivel subatómico en el universo.

La energía recién creada y liberada por cada uno de estos sucesos de nucleogénesis equivaldría a tres fotones de bremsstrahlung de 155 MeV cada uno, para un total de 465 MeV, más un aumento generado adiabáticamente de masa relativista estable no liberable de  $938 - 1,533 = 936,467 \text{ MeV}/c^2$ , para una ganancia total de energía de 1401,467 MeV, o 1.401.467.000 eV o  $2,245 \times 10^{-10}$  Julios [32], que es 34,35 millones de veces más energía que los 40,8 eV obtenidos por la aceleración adiabática irreversible inicial de un electrón recién creado hacia el orbital de mínima acción de un átomo de hidrógeno [42] [43].

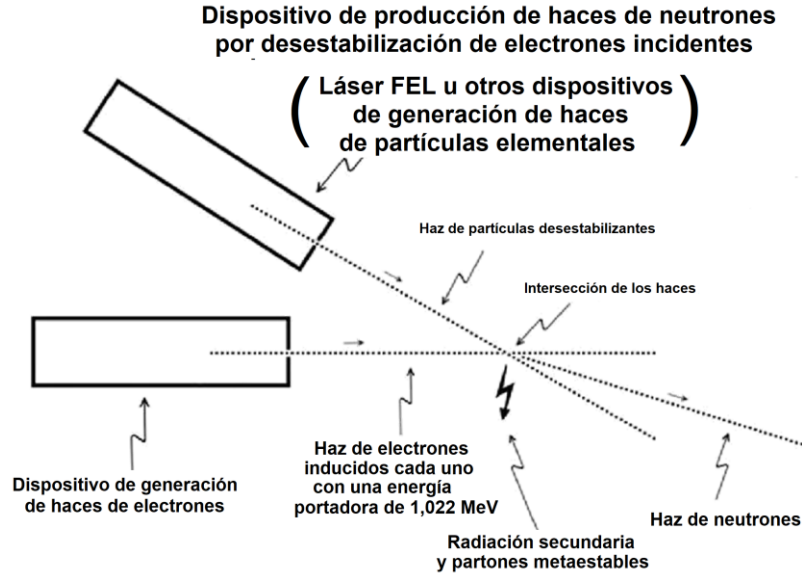
Para garantizar en aquel momento que esta posibilidad quedara permanentemente documentada en los archivos oficiales, en 2015 se decidió registrar una solicitud PCT en la *Organización Mundial de la Propiedad Intelectual* (OMPI) para su evaluación, y solicitar patentes en Canadá y Estados Unidos relacionadas con los medios potenciales identificados para lograr dicha generación de nucleones, aunque estas posibilidades estuvieran demasiado alejadas de las teorías físicas actuales establecidas como para ser aceptadas.

Como resultado, estos procesos, descritos brevemente en las **Figuras 17, 18 y 19**, son ahora de dominio público y sus descripción y justificación completas están ahora disponibles de forma permanente en el sitio web de la OMPI, así como en las bases de datos de patentes de Canadá y EE.UU. [45] [46] [47], para cualquiera que desee estudiarlos y posiblemente utilizarlos.

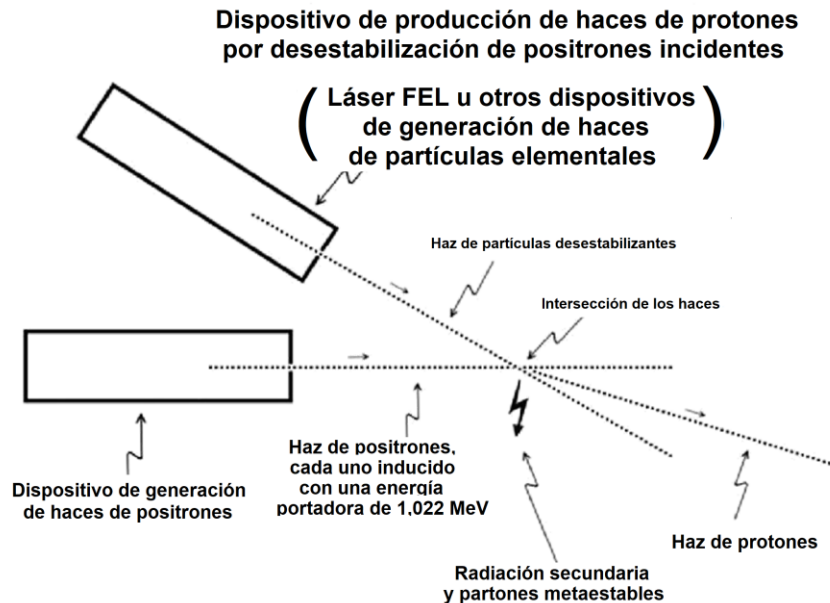


**Figura 17:** Ilustración esquemática del equipo de generación de haces de partículas utilizado para generar protones y neutrones a partir de la desestabilización de fotones, cada uno con una energía de 1,022 MeV.

## Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial



**Figura 18:** Ilustración esquemática del equipo de generación de haces de partículas utilizado para generar neutrones mediante la desestabilización de electrones, cada uno con una energía portadora de 1,022 MeV.



**Figura 19:** Ilustración esquemática del equipo de generación de haces de partículas utilizado para generar protones a partir de la desestabilización de positrones, cada uno con una energía portadora de 1,022 MeV.

## 11. Conclusión

En lo que respecta a la Ecuación (2) de Schrödinger, puede observarse que el uso de números complejos para dar cuenta de la orientación perpendicular de la energía de la masa en reposo del electrón en el *plano complejo* 2D con respecto a su supuesta dirección de movimiento a lo largo de la trayectoria media de Bohr representa correctamente la

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

Ecuación (1) no relativista de de Broglie, dado que la *masa en reposo* clásica del electrón se percibía en aquella época como carente de estructura interna, tal como se analiza en la Referencia [48], y que su representación mediante la única cantidad representada por  $\Psi_{(r,t)}$  oscilando armónicamente a la distancia media del radio de Bohr daba cuenta correctamente de la naturaleza no relativista de la ecuación original de de Broglie. Finalmente, Dirac elevó la ecuación de Schrödinger al nivel de ecuación relativista.

Con respecto al uso de *números complejos* en el análisis de circuitos electrónicos accionados sinusoidalmente, en los que intervienen típicamente sistemas RLC o LC, formados por bobinas de alambre y condensadores, observamos que la orientación vectorial de las componentes L y C de estos sistemas puede representarse correctamente en el *plano complejo* con respecto al *eje real*, ya que tanto L como C se representan como perpendiculares a la dirección del eje real en el *plano complejo* 2D, pero que no es posible representarlas de otro modo que en oposición de  $180^\circ$  (**Figura 8a**), contrariamente a su conocida orientación vectorial mutua de  $90^\circ$  en la teoría electromagnética, que puede verse mejor representada dentro del *sistema de coordenadas de cuaterniones* 3D (**Figura 8b**).

Con este análisis del plano complejo 2D ilustrado en la **Figura 3**, recuperamos la conclusión de Vessel de que en el número complejo  $a+ib$ ,  $i=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  es en realidad un *vector unitario dirigido* de magnitud 1 que rota la dirección de la magnitud de  $b$   $90^\circ$  con respecto a la orientación relativa de la magnitud  $a$ .

El análisis de la *hiperesfera* de los cuaterniones mostrada en la **Figura 4** muestra que cada vector unitario de los conjuntos de *vectores unitarios dirigidos* 3D  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  e  $i^2=j^2=k^2=-1=1\angle 180^\circ$  tiene las mismas propiedades rotacionales con respecto a los planos complejos 2D establecidos por cada uno de los otros dos vectores unitarios dirigidos del mismo conjunto de 3 vectores y con respecto a la magnitud  $a$  en el *número hipercomplejo*  $a + bi + cj + dk$ .

Cuando aislamos el complejo de *vectores unitarios dirigidos* 3D  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$  del cuaternión y lo analizamos con más detalle, observamos que  $i^2=j^2=k^2=-1=1\angle 180^\circ$  es el equivalente exacto del conjunto de *vectores unitarios cartesianos* 3D tradicionales  $i=j=k=1$ , en el que  $\angle \theta$  está indeterminado, pero que al multiplicar un vector cartesiano por  $-1$  también se invierte el sentido de aplicación del vector cartesiano en  $180^\circ$ .

Esto significa que, fundamentalmente, los *vectores unitarios cartesianos* tridimensionales tradicionales  $i=j=k=1$  que son perpendiculares únicamente *por definición* entre sí podrían ser potencialmente sustituidos por el conjunto de *vectores unitarios complejos*  $i=j=k=\sqrt{-1}=1\angle \theta=|1|$  en el que los vectores unitarios son perpendiculares por estructura entre sí y en el que  $|1|$  es la longitud absoluta de todos los *vectores unitarios*, que puede tomar valores cualificados de rotación angular  $|1|=1\angle \theta=1\angle 0^\circ$  o  $|1|=1\angle \theta=1\angle 90^\circ$  o  $|1|=1\angle \theta=1\angle 180^\circ$ , o permanecer sin especificar con valor por defecto  $|1|=1$  en función de los requisitos matemáticos contextuales, con valor por defecto  $|1|=1\angle 0^\circ$ , de acuerdo con el conjunto 3D tradicional de *vectores unitarios cartesianos*  $i=j=k=1$ .

El interés de este planteamiento radicaría en que la inversión del sentido de aplicación del tercer vector de un producto vectorial cruzado en la mecánica electromagnética representado por las Ecuaciones (14), (15) y (16), relacionadas con las configuraciones vectoriales de las **Figuras 9a, 9b y 9c**, se convertiría en una posibilidad matemática

### *Evolución del plano complejo a la geometría tresespacial*

actualmente ausente de nuestra caja de herramientas matemáticas si el conjunto de *vectores unitarios*  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=\sqrt{-1}=1\angle\theta=|1|$  que son mutuamente perpendiculares *por estructura* se utilizara en mecánica electromagnética en lugar de los actuales *vectores unitarios cartesianos* 3D  $\mathbf{i}=\mathbf{j}=\mathbf{k}=1$  que son perpendiculares entre sí sólo *por definición*.

## Referencias

- [1] Renou, MO., Trillo, D., Weilenmann, M. *et al.* (2021) *Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified*. *Nature* **600**, 625–629 (2021).  
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04160-4>.  
<https://www.nature.com/articles/s41586-021-04160-4>
- [2] Ming-Cheng Chen, Can Wang, *et al.* (2022) *Ruling Out Real-Valued Standard Formalism of Quantum Theory*. *Phys. Rev. Lett.* 128, 040403 – Published 24 January 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.040403>.  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.128.040403>
- [3] Padavic-Callaghan, K. (2022) *Complex numbers are essential in quantum theory, experiments reveal*. *Quantum Mechanics*. Research update. 11 Jan 2022.  
<https://physicsworld.com/a/complex-numbers-are-essential-in-quantum-theory-experiments-reveal/>
- [4] Nahim, P.J. (1998). *An Imaginary Tale – The Story of  $\sqrt{-1}$* . Princeton University Press. New Jersey.
- [5] Danielewski, M. and Sapa, L. (2020) Foundations of the Quaternion Quantum Mechanics. *Entropy* **2020**, 22(12), 1424; <https://doi.org/10.3390/e22121424>.  
<https://www.mdpi.com/1099-4300/22/12/1424>
- [6] Graydon, M. (2011) Quaternions and Quantum Theory. UWSpace.  
<http://hdl.handle.net/10012/6168>.  
[https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/6168/Graydon\\_Matthew.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/6168/Graydon_Matthew.pdf?sequence=1&isAllowed=y).
- [7] Dunning-Davies, J. and Norman, R. (2020) *Deductions from the Quaternion Form of Maxwell's Electromagnetic Equations*. *Journal of Modern Physics*, **11**, 1361-1371. doi: [10.4236/jmp.2020.119085](https://doi.org/10.4236/jmp.2020.119085).  
<https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=102987>
- [8] Hong, I.K. and Kim, C.S. (2019) *Quaternion Electromagnetism and the Relation with 2-Spinor Formalism*. arXiv:1902.09773v2 [physics.class-ph].  
<https://arxiv.org/pdf/1902.09773.pdf>
- [9] Sears, F., Zemansky, M. and Young, H. (1984) *University Physics*, 6th Edition, Addison Wesley.
- [10] Michaud, A. (2016) *On De Broglie's Double-particle Photon Hypothesis*. *J Phys Math* 7: 153. doi:10.4172/2090-0902.1000153.  
<https://www.hilarispublisher.com/open-access/on-de-broglies-doubleparticle-photon-hypothesis-2090-0902-1000153.pdf>
- [11] Michaud, A. (2021) *De Broglie's Double-Particle Photon*. In: Dr. Jelena Purenovic, Editor. *Newest Updates in Physical Science Research* Vol. 4, 63–102.  
<https://doi.org/10.9734/bpi/nupsr/v4/1979F>  
<https://stm.bookpi.org/NUPSR-V4/article/view/1642>
- [12] Resnick, R., Halliday, D. (1967) *Physics*. John Wiley & Sons, New York.



- [https://www.scirp.org/pdf/jmp\\_2022053015080692.pdf](https://www.scirp.org/pdf/jmp_2022053015080692.pdf)
- [26] Michaud, A. (2013) *The Mechanics of Electron-Positron Pair Creation in the 3-Spaces Model*. International Journal of Engineering Research and Development e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 6, Issue 10. pp. 01-10.  
<http://ijerd.com/paper/vol6-issue10/F06103649.pdf>
- [27] Gélinas, R. & Lambert, M. (1988) *Éléments d'analyse complexe*. Presses de l'Université du Québec. Canada. ISBN 2-7605-0488-3.
- [28] Scherz, P. (2007) *Practical Electronics for Inventors – Second Edition*. McGraw Hill. New York.
- [29] Michaud, A. (2013) *On the Einstein-de Haas and Barnett Effects*, International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X, www.ijerd.com Volume 6, Issue 12 (May 2013), PP. 07-11.  
<http://ijerd.com/paper/vol6-issue12/B06120711.pdf>
- [30] Einstein, A. (1905a) *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*. *Annalen der Physik*, vol. 17, n° 6, 1905, p. 132–148. (DOI [10.1002/andp.19053220607](https://doi.org/10.1002/andp.19053220607)),  
<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/andp.19053220607>  
[http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/files/eins\\_lq.pdf](http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/files/eins_lq.pdf)
- [31] Anderson, C.D. (1933) *The Positive Electron*, California Institute of Technology, Pasadena, California (Received February 28, 1933).  
<https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.43.491>
- [32] Michaud, A. (2013) *The Mechanics of Neutron and Proton Creation in the 3-Spaces Model*. International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN : 2278-800X, Volume 7, Issue 9. pp. 29-53.  
<http://ijerd.com/paper/vol7-issue9/E0709029053.pdf>
- [33] Bodnarczuk, M.-W., Editor. (1988) *Reflections on the 15 Foot Bubble Chamber*. Fermi National Accelerator Laboratory Batavia, Illinois.  
<https://iss.fnal.gov/archive/misc/fermilab-misc-1988-01.pdf>
- [34] Michaud, A. (1999/2012). *Theory of Discrete Attractors*, SRP Books. Smashwords. ISBN: 9780988052727.  
<https://www.smashwords.com/books/view/159189>
- [35] Michaud, A. (2013) *The Expanded Maxwellian Space Geometry and the Photon Fundamental LC Equation*. International Journal of Engineering Research and Development, e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 6, Issue 8, pp. 31-45.  
<http://ijerd.com/paper/vol6-issue8/G06083145.pdf>.
- [36] Michaud, A. (2021) *Our Electromagnetic Universe*. In: Dr. Mohd Rafatullah, Editor. *Newest Updates in Physical Science Research Vol. 12*. 23 July 2021, Page 64-82.  
<https://doi.org/10.9734/bpi/nupsr/v12/11459D>
- [37] Michaud, A. (2004) *Géométrie maxwellienne augmentée de l'espace*. 4<sup>e</sup> Édition. Les Éditions SRP. Smashwords. ISBN: 9782924175033.

- <https://www.smashwords.com/books/view/163704>
- [38] Michaud, A. (2013) *The Mechanics of Neutrinos Creation in the 3-Spaces Model*. International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 7, Issue 7, pp.01-08.  
<http://www.ijerd.com/paper/vol7-issue7/A07070108.pdf>
- [39] Michaud, A. (2017) *The Last Challenge of Modern Physics*. J Phys Math 8: 217. doi: 10.4172/2090-0902.1000217.  
<https://www.hilarispublisher.com/open-access/the-last-challenge-of-modern-physics-2090-0902-1000217.pdf>
- [40] Michaud, A. (2021) *The Last Challenge of Modern Physics: Perspective to Concept and Model Analysis*. In: Dr. Jelena Purenovic, Editor. Newest Updates in Physical Science Research Vol. 4, 1–29.  
<https://stm.bookpi.org/NUPSR-V4/article/view/1640>
- [41] Michaud, A. (2013) *From Classical to Relativistic Mechanics via Maxwell*, International Journal of Engineering Research and Development, e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 6, Issue 4, pp. 01-10.  
[https://www.researchgate.net/publication/282353551\\_From\\_Classical\\_to\\_Relativistic\\_Mechanics\\_via\\_Maxwell](https://www.researchgate.net/publication/282353551_From_Classical_to_Relativistic_Mechanics_via_Maxwell)
- [42] Michaud, A. (2013) *Inside planets and stars masses*. International Journal of Engineering Research and Development. e-ISSN: 2278-067X, p-ISSN: 2278-800X. Volume 8, Issue 1, pp. 10-33.  
<http://ijerd.com/paper/vol8-issue1/B08011033.pdf>
- [43] Michaud, A. (2016) *On Adiabatic Processes at the Elementary Particle Level*. J Phys Math 7: 177. doi:10.4172/2090-0902.1000177.  
<https://projecteuclid.org/journals/journal-of-physical-mathematics/volume-7/issue-2/On-Adiabatic-Processes-at-the-Elementary-Particle-Level/10.4172/2090-0902.1000177.full>
- [44] Michaud, A. (2021) *On Adiabatic Processes at the Subatomic Level*. In: Dr. Jelena Purenovic, Editor. Newest Updates in Physical Science Research Vol. 4, 30–62.  
<https://doi.org/10.9734/bpi/nupsr/v4/1978F>  
<https://stm.bookpi.org/NUPSR-V4/article/view/1641>
- [45] Michaud, A. (2015) WO2017041162 – *Neutron and Proton Generating processes*. International Application No. PCT/CA2016/000201. World Intellectual Property Organization (WIPO).  
<https://patentscope.wipo.int/search/en/detail.jsf?docId=WO2017041162&recNum=1&maxRec=&office=&prevFilter=&sortOption=&queryString=&tab=PCT+Biblio>
- [46] Michaud, A. (2018) *Patent application CA 2997508 for Neutron and Proton Generating Processes*. Canadian Patent Database.  
[https://www.ic.gc.ca/opic-cipo/cpd/eng/patent/2997508/summary.html?type=number\\_search&tab1Index=tab1\\_1](https://www.ic.gc.ca/opic-cipo/cpd/eng/patent/2997508/summary.html?type=number_search&tab1Index=tab1_1)

- [47] Michaud, A. (2018) *Patent application US-20180261348-A1 - Neutron and proton generating processes*. United States Patent Application Publication.  
<https://ppubs.uspto.gov/dirsearch-public/print/downloadPdf/20180261348>
- [48] Michaud, A. (2020) *Gravitation, Quantum Mechanics and the Least Action Electromagnetic Equilibrium States*. In: Amenosis Lopez, editor. Prime Archives in Space Research. Hyderabad, India: Vide Leaf. 2020.  
<https://videleaf.com/gravitation-quantum-mechanics-and-the-least-action-electromagnetic-equilibrium-states/>